Расширенное введение в алгебраическую интерполяцию

С. Ю. Соловьев

В работе описываются и обосновываются операторы, позволяющие находить коэффициенты интерполяционных полиномов и обращать матрицы Вандермонда. Кроме того, в работе приводятся оценки сложности этих операторов и обсуждаются вопросы их программной реализации.

1. Введение

В современных учебниках по вычислительной математике задачу алгебраического интерполирования принято рассматривать как частный случай общей задачи интерполирования. При этом за пределами рассмотрения остаются весьма поучительные особенности именно *алгебраической интерполяции*, представляющие интерес для расширения математического кругозора студентов и учеников старших классов.

Задача алгебраического интерполирования состоит в построении одноименного многочлена по известным значениям этого многочлена в некоторых точках. Естественным потомком задачи алгебраического интерполирования является рассмотренная в п.5 задача обращения матрицы Вандермонда. Введем необходимые обозначения.

Будем оперировать векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$ и т.д. размерности $n{+}1$, компоненты которых записываются в одну строку и нумеруются от 0 до n. Для записи тех же векторов "столбиком" будем использовать операцию транспонирования: $\vec{x}^{\mathsf{T}}$, $\vec{y}^{\mathsf{T}}$ и т.д.

По определению пара векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ задает задачу алгебраического интерполирования, и будем записывать этот факт в виде $\vec{x} \bowtie \vec{y}$, если все компоненты вектора $\vec{x}$ (именуемые узлами интерполирования) различны. В дальнейшем задачу алгебраического интерполирования будем для краткости именовать просто задачей интерполирования. Подчеркнем: если вектор $\vec{x}$ содержит одинаковые компоненты, то о задаче интерполирования говорить не приходится.

Коэффициентным решением задачи интерполирования $(x_0, \ldots, x_n) \bowtie (y_0, \ldots, y_n)$ называется вектор $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющий так называемым интерполяционным условиям

$$a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_n x_i^n = y_i \qquad (i{=}0, ..., n), \tag{1}$$

при этом многочлен $P(x; \vec{a}) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ называется *интерполяционным полиномом.*

Пример 1. Коэффициентным решением задачи интерполирования

$$(-1, 0, 1, 2) \bowtie (14, 3, 0, -7)$$

является вектор $\vec{a} = (3, -5, +4, -2)$. В самом деле, для полинома $P(x; \vec{a}) = 3 - 5\,x + 4\,x^2 - 2\,x^3$ интерполяционные условия проверяются без затруднений:

$$P(-1; \vec{a}) = 14, \qquad P(0; \vec{a}) = 3, \qquad P(1; \vec{a}) = 0, \qquad P(2; \vec{a}) = -7.$$

Пусть $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \bowtie (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ — некоторая задача интерполирования. Введем в рассмотрение знаменитую формулу Лагранжа[1], которая удовлетворяет интерполяционным условиям, но не является коэффициентным решением задачи интерполирования:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}. \tag{2}$$

Для примера 1 формула Лагранжа $L_3(x)$ состоит из четырех слагаемых:

$$14\,\frac{x-0}{-1-0}\,\frac{x-1}{-1-1}\,\frac{x-2}{-1-2} + 3\,\frac{x+1}{0+1}\,\frac{x-1}{0-1}\,\frac{x-2}{0-2} + 0\,\frac{x+1}{1+1}\,\frac{x-0}{1-0}\,\frac{x-2}{1-2} - 7\,\frac{x+1}{2+1}\,\frac{x-0}{2-0}\,\frac{x-1}{2-1}.$$

Как нетрудно проверить,

$$L_3(-1) = 14+0+0-0 = 14\,, \qquad L_3(0) = 0+3+0-0 = 3\,,$$
$$L_3(1) = \ 0+0+0-0 = 0\,, \qquad L_3(2) = 0+0+0-7 = -7\,.$$

Строго говоря, формула Лагранжа позволяет выразить коэффициентное решение задачи интерполирования, достаточно "лишь" раскрыть скобки и привести подобные. В частности, таким образом можно выразить младший и старший коэффициенты,

$$a_0 = L_n(0) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x_j}{x_j-x_i}, \qquad a_n = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_j}, \tag{3}$$

а для остальных коэффициентов получаемые аналитические выражения весьма громоздки. К счастью, существует обходной путь, позволяющий конструировать коэффициенты решения посредством серии достаточно простых формул.

2. Инструментальная подготовка

Эквивалентным представлением задачи интерполирования $\vec{x} \bowtie \vec{y}$ для векторов $\vec{x} = (x_0, .., x_n)$ и $\vec{y} = (y_0, .., y_n)$ является система линейных алгебраических уравнений $B\,\vec{a}^{\mathsf{T}} = \vec{y}^{\mathsf{T}}$ относительно компонент вектора $\vec{a}$. В этой системе задействована матрица Вандермонда[2]

$$B = B(x_0, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Матрица Вандермонда является невырожденной[3], поэтому имеет место следующее

Важное утверждение. *Решение задачи интерполирования существует и оно единственно.*

Ценность этого утверждения состоит в том, что оно позволяет "угадывать" решения задачи интерполирования. В самом деле, если для частной задачи удалось из каких-то соображения построить вектор коэффициентов, удовлетворяющий интерполяционным условиям, то этот вектор и есть решение задачи и другого решения быть не может.

---

[1] Joseph Louis Lagrange (JLL), 1736–1813.
[2] Alexandre-Theophile Vandermonde (ATV), 1735–1796.
[3] См., например, вывод формулы для $det(B)$ в [4]

Пусть $(x_0, .., x_n) \bowtie (y_0, .., y_n)$ — задача интерполирования. Определим векторы $\vec{s}$ и $\vec{d}$:

$$s_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x_j}{x_j - x_i}, \qquad d_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \qquad\qquad (i{=}0, .., n). \tag{4}$$

Из сравнения формул (3) и (4) немедленно вытекает, что младший и старший коэффициенты искомого решения выражаются через скалярные произведения:

$$a_0 = (\vec{s}, \vec{y}), \qquad a_n = (\vec{d}, \vec{y}), \tag{5}$$

По сути дела, векторы $\vec{s}$ и $\vec{d}$ являются *характеристиками узлов интерполирования*, они не зависят от значений интерполяционого полинома. В последующих построениях векторы $\vec{s}$ и $\vec{d}$ используются как главные инструменты выявления всех неизвестных коэффициентов интерполяционного полинома.

В специальной литературе вектор $\vec{d}$ известен как вектор весов, которые существенно используются в *барицентрических интерполяционных формулах* [9]:

$$L_n(x) = \omega_n(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{d_j\, y_j}{x - x_j}, \quad \text{где} \;\; \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Далее предлагается универсальный подход к решению задач интерполирования. Обычно в качестве средств фиксации того или иного подхода используются алгоритмы, которые по виду исполнителя подразделяются на два класса. К первому классу относятся алгоритмы, предназначенные для вычисления на компьютере, а ко второму — алгоритмы, исполняемые человеком. Алгоритмы второго класса опираются на установленные аналитические соотношения, они демонстрируют теоретические возможности и нуждаются в последующей компьютерной адаптации. В рамках задачи интерполирования для записи алгоритмов второго класса удобно использовать хорошо известный аппарат операторов, каждый из которых, в конечном итоге, можно свести к преобразованию векторов одного конечномерного пространства в векторы другого конечномерного пространства. Операторы будем задавать упорядоченными последовательностями формул.

3. Оператор $JLL|s$

Зафиксируем задачу $\vec{x} \bowtie \vec{y}$, в которой все узлы интерполирования отличны от нуля. Обозначим $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты интерполяционного полинома. Первая из формул (5) позволяет найти коэффициент a_0: $a_0 = (\vec{s}, \vec{y})$.

При известном коэффициенте a_0 интерполяционные условия (1) трансформируются в

$$a_1 + a_2 x_i + \cdots + a_n x_i^{n-1} = y_i^{[1]}, \quad \text{где} \;\; y_i^{[1]} = (y_i - a_0)/x_i, \quad i{=}0, .., n. \tag{6}$$

Рассмотрим задачу $\vec{x} \bowtie \vec{y}^{\,[1]}$. Нетрудно проверить, что коэффициентным решением (а значит и *единственным* коэффициентным решением) этой задачи является вектор $(a_1, \ldots, a_n, 0)$, поэтому $a_1 = (\vec{s}, \vec{y}^{\,[1]})$.

При известном коэффициенте a_1 условия (6) трансформируются в

$$a_2 + a_3 x_i + \cdots + a_n x_i^{n-2} = y_i^{[2]}, \quad \text{где} \;\; y_i^{[2]} = (y_i^{[1]} - a_1)/x_i, \quad i{=}0, .., n,$$

и поэтому единственным коэффициентным решением задачи $\vec{x} \bowtie \vec{y}^{\,[2]}$ является вектор $(a_2, \ldots, a_n, 0, 0)$ и, следовательно, $a_2 = (\vec{s}, \vec{y}^{\,[2]})$.

Продолжая этот процесс, можно выразить все коэффициенты интерполяционного полинома для задачи $\vec{x} \bowtie \vec{y}$. Формулы, выделенные из приведенных рассуждений, образуют оператор, позволяющий находить коэффициентное решение задачи интерполирования с ненулевыми узлами.

Оператор $JLL|s$: $(\,x_0,\ldots,x_n\,)$ и $(\,y_0,\ldots,y_n\,) \to (\,a_0,\ldots,a_n\,)$
при условии $x_0 \neq 0,\ldots,x_n \neq 0$.

$a_0 = (\vec{s},\vec{y})$, где $\vec{s} = (s_0,\ldots,s_n)$ и $s_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} x_j/(x_j{-}x_i)$ для $i{=}0,..,n$;

$a_1 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[1]})$, где $\vec{y}^{\,[1]} = (y_0^{[1]},\ldots,y_n^{[1]})$ и $y_i^{[1]} = (y_i - a_0)/x_i$ для $i{=}0,..,n$;

$a_2 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[2]})$, где $\vec{y}^{\,[2]} = (y_0^{[2]},\ldots,y_n^{[2]})$ и $y_i^{[2]} = (y_i^{[1]}{-}a_1)/x_i$ для $i{=}0,..,n$;

$\ldots$

$a_n = (\vec{s},\vec{y}^{\,[n]})$, где $\vec{y}^{\,[n]} = (y_0^{[n]},\ldots,y_n^{[n]})$ и $y_i^{[n]} = (y_i^{[n-1]}{-}a_{n-1})/x_i$ для $i{=}0,..,n$. $\square$

Пример 2. Для задачи интерполирования

$$(\,-1.0,\ -0.5,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0\,) \bowtie (\,19.1,\ 4.7,\ 2.3,\ 5.9,\ 11.1,\ 1.7\,),\quad n{=}5, \tag{7}$$

действие оператора $JLL|s$ выглядит так:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
\vec{s} = (-1/15, & 0.4, & 4/3, & -1.0, & 0.4, & -1/15\,) & \Rightarrow & a_0 = (\vec{s},\vec{y}) & = +2.1,\\
\vec{y}^{\,[1]} = (\,-17.0, & -5.2, & 0.4, & 3.8, & 6.0, & -0.2\,) & \Rightarrow & a_1 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[1]}) & = -1.8,\\
\vec{y}^{\,[2]} = (\quad 15.2, & 6.8, & 4.4, & 5.6, & 5.2, & 0.8\,) & \Rightarrow & a_2 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[2]}) & = +4.0,\\
\vec{y}^{\,[3]} = (\,-11.2, & -5.6, & 0.8, & 1.6, & 0.8, & -1.6\,) & \Rightarrow & a_3 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[3]}) & = -1.6,\\
\vec{y}^{\,[4]} = (\quad 9.6, & 8.0, & 4.8, & 3.2, & 1.6, & 0.0\,) & \Rightarrow & a_4 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[4]}) & = +6.4,\\
\vec{y}^{\,[5]} = (\quad -3.2, & -3.2, & -3.2, & -3.2, & -3.2, & -3.2\,) & \Rightarrow & a_5 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[5]}) & = -3.2.
\end{array}$$

То есть коэффициентным решением задачи (7) является вектор

$$\vec{a} = (\,+2.1,\ -1.8,\ +4.0,\ -1.6,\ +6.4,\ -3.2\,),$$

которому соответствует интерполяционный полином

$$P(x;\vec{a}) = 2.1 - 1.8x + 4.0x^2 - 1.6x^3 + 6.4x^4 - 3.2x^5.$$

Следствие 1. *Для нахождения коэффициента* a_n *используется тот факт, что решением задачи* $\vec{x} \bowtie \vec{y}^{\,[n]}$ *является вектор* $(a_n,0,\ldots,0)$, *поэтому вектор* $\vec{y}^{\,[err]}$, *в котором* $y_j^{[err]} = y_j^{[n]} - a_n$, *должен быть нулевым:* $\vec{y}^{\,[err]} = 0$.

Замечание. В общем случае один из узлов интерполирования может быть нулем. Не ограничивая общности, можно полагать, что нулевой узел (если он имеется) занимает нулевую позицию. В этой ситуации нахождение коэффициента a_0 упрощается: $a_0 = y_0$, а для всех остальных коэффициентов задача сводится к предыдущей. Другими словами, коэффициентным решением задачи $(0,x_1,\ldots,x_n) \bowtie (y_0,y_1,\ldots,y_n)$ является вектор коэффициентов $(y_0,a'_0,\ldots,a'_{n-1})$, в котором $(a'_0,\ldots,a'_{n-1})$ – коэффициентное решение задачи $(x_1,\ldots,x_n) \bowtie (y'_1,\ldots,y'_n)$ с ненулевыми узлами интерполирования и $y'_i = (y_i - y_0)/x_i$.

4. Оператор $JLL|d$

В операторе $JLL|s$ зафиксирован порядок нахождения искомых коэффициентов по возрастанию степеней аргумента. Построим оператор $JLL|d$, в котором используется обратный порядок нахождения коэффициентов.

Пусть $\vec{x} \bowtie \vec{y}$ — некоторая задача интерполирования. Обозначим $a_0,a_1,\ldots,a_n$ — коэффициенты интерполяционного полинома. Вторая из формул (5) позволяет найти коэффициент a_n: $a_n = (\vec{d},\vec{y})$.

При известном коэффициенте a_n интерполяционные условия (1) трансформируются в

$$a_0x_i + a_1x_2^2 \cdots + a_{n-1}x_i^n = z_i^{[n-1]},\quad \text{где}\ \ z_i^{[n-1]} = (y_i{-}a_nx_i^n)x_i,\quad i{=}0,..,n. \tag{8}$$

Рассмотрим задачу $\vec{x} \bowtie \vec{z}^{[n-1]}$, в которой $\vec{z}^{[n-1]} = (z_0^{[n-1]}, \ldots, z_n^{[n-1]})$. Нетрудно проверить, что коэффициентным решением (а значит и *единственным* коэффициентным решением) этой задачи явлется вектор $(0, a_0, \ldots, a_{n-1})$, поэтому $a_{n-1} = (\vec{d}, \vec{z}^{[n-1]})$.

При известном коэффициенте a_{n-1} условия (8) трансформируются в

$$a_0 x_i^2 + a_1 x_2^3 \cdots + a_{n-2} x_i^n = z_i^{[n-2]}, \quad \text{где} \quad z_i^{[n-2]} = (z_i^{[n-1]} - a_{n-1} x_i^n) x_i, \quad i{=}0,..n,$$

и поэтому единственным коэффициентным решением задачи $\vec{x} \bowtie \vec{z}^{[n-2]}$, в которой $\vec{z}^{[n-2]} = (z_0^{[n-2]}, \ldots, z_n^{[n-2]})$, является вектор $(0, 0, a_2, \ldots, a_{n-2})$ и, следовательно, $a_{n-2} = (\vec{d}, \vec{z}^{[n-2]})$.

Продолжая этот процесс, можно выразить все коэффициенты интерполяционного полинома для задачи $\vec{x} \bowtie \vec{y}$. Формулы, выделенные из приведенных рассуждений, составляют оператор, позволяющий находить коэффициентное решение задачи интерполирования.

Оператор $JLL|d$: $(\, x_0, \ldots, x_n \,)$ и $(\, y_0, \ldots, y_n \,) \to (\, a_0, \ldots, a_n \,)$

$a_n \;\; = (\vec{d}, \vec{y})$, где $\vec{d} = (d_0, \ldots, d_n)$, $d_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)^{-1}$, $i{=}0,..,n$;

$a_{n-1} = (\vec{d}, \vec{z}^{[n-1]})$, где $\vec{z}^{[n-1]} {=} (z_0^{[n-1]}, \ldots, z_n^{[n-1]})$, $z_i^{[n-1]} {=} (y_i - a_n x_i^n) x_i$, $i{=}0,..,n$;

$a_{n-2} = (\vec{d}, \vec{z}^{[n-2]})$, где $\vec{z}^{[n-2]} {=} (z_0^{[n-2]}, \ldots, z_n^{[n-2]})$, $z_i^{[n-2]} {=} (z_i^{[n-1]} - a_{n-1} x_i^n) x_i$, $i{=}0,..,n$;

$\cdots$

$a_0 \;\; = (\vec{d}, \vec{z}^{[0]})$, где $\vec{z}^{[0]} {=} (z_0^{[0]}, \ldots, z_n^{[0]})$, $z_i^{[0]} {=} (z_i^{[1]} - a_1 x_i^n) x_i$, $i{=}0,..,n$. $\square$

Пример 3. Для задачи интерполирования

$$(\, 0,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 2.5 \,) \bowtie (\, 8,\ 6,\ 5,\ 12,\ 25 \,), \quad n{=}4 \tag{9}$$

действие оператора $JLL|d$ выглядит так:

$$\begin{array}{rllllll}
\vec{d} = (2/5, & -4/3, & 4/3, & -2/3, & 4/15\,) & \Rightarrow & a_4 = (\vec{d}, \vec{y}) \;\;\; = \;\; 8/15, \\
\vec{z}^{[3]} = (0, & 179/60, & 67/15, & 104/15, & 125/12\,) & \Rightarrow & a_3 = (\vec{d}, \vec{z}^{[3]}) = \;\; 2/15, \\
\vec{z}^{[2]} = (0, & 357/240, & 13/3, & 144/15, & 625/48\,) & \Rightarrow & a_2 = (\vec{d}, \vec{z}^{[2]}) = \; 13/15, \\
\vec{z}^{[1]} = (0, & 43/60, & 52/15, & -128/15, & -625/12\,) & \Rightarrow & a_1 = (\vec{d}, \vec{z}^{[1]}) = -68/15, \\
\vec{z}^{[0]} = (0, & 0.5, & 8, & 128, & 312.5\;\;) & \Rightarrow & a_0 = (\vec{d}, \vec{z}^{[0]}) = \;\; 8.
\end{array}$$

То есть коэффициентным решением задачи (9) является вектор

$$\vec{a} = (\, +8,\ -68/15,\ +13/15,\ +2/15\ +8/15 \,),$$

которому соответствует интерполяционный полином

$$P(x; \vec{a}) = 8 - \frac{68}{15}\, x + \frac{13}{15}\, x^2 + \frac{2}{15}\, x^3 + \frac{8}{15}\, x^4.$$

Следствие 2. *Для нахождения коэффициента* a_0 *используется тот факт, что решением задачи* $\vec{x} \bowtie \vec{z}^{[0]}$ *является вектор* $(0, \ldots, 0, a_0)$*, поэтому вектор* $\vec{z}^{[err]}$*, в котором* $z_j^{[err]} = z_j^{[0]} - a_0\, x_j^n$*, должен быть нулевым:* $\vec{z}^{[err]} = 0$.

Отметим, что оператор $JLL|s$ ($JLL|d$) реализует метод решения системы линейных алгебраических уравнений с нижне- (верхне-) треугольной матрицей специального вида.

5. Оператор $ATV|s$

С формальной точки зрения решение $\vec{a}^{\mathsf{T}}$ задачи интерполирования $\vec{x} \bowtie \vec{y}$ можно получить как $B^{-1}\,\vec{y}^{\mathsf{T}}$, где B^{-1} — матрица, обратная матрице Вандермонда. В современной информатике матрица B^{-1} представляет самостоятельный интерес, она применяется не только для целей интерполяции. Выделим B^{-1} из оператора $JLL|s$. Полученный при этом оператор (обозначим его $ATV|s$) преобразует узлы интерполирования $\vec{x}$ в матрицу B^{-1}.

Будем рассматривать построчное строение матрицы B^{-1}.

$$B^{-1} = B^{-1}(x_0,\,\ldots,x_n) = \begin{bmatrix} v_{00} & v_{01} & \ldots & v_{0n} \\ v_{10} & v_{11} & \ldots & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n0} & v_{n1} & \ldots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \ldots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix}, \text{ где } \begin{array}{l} \vec{v}_0 = (v_{00},\ldots,v_{0n}), \\ \vec{v}_1 = (v_{10},\ldots,v_{1n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{v}_n = (v_{n0},\ldots,v_{nn}). \end{array}$$

С учетом принятых обозначений[4] коэффициенты интерполяционного полинома выражаются через скалярные произведения $a_i = (\vec{v}_i, \vec{y})$.

Пусть $\vec{x}$ не содержит нули, $\vec{y}$ — произвольный вектор значений, $\vec{a} = (a_0,\ldots,a_n)$ — соответствующее коэффициентное решение. Поскольку равенство $a_0 = (\vec{s},\vec{y}) = (\vec{v}_0,\vec{y})$ выполняется для любого $\vec{y}$, то $\vec{v}_0 = \vec{s}$. Для нахождения остальных векторов $\vec{v}_1,\,\ldots,\,\vec{v}_n$ рассмотрим две задачи интерполирования:

$$\vec{x} \bowtie \vec{y} \quad \text{и} \quad \vec{x} \bowtie \vec{y}^{\,[1]}, \tag{10}$$

где $\vec{y}^{\,[1]}$ — вектор, “произведенный” оператором $JLL|s$ среди прочих промежуточных векторов:

$$\vec{y}^{\,[1]} = (\,y_0^{[1]},\,y_1^{[1]},\,\cdots,y_n^{[1]}\,), \text{ где } \; y_i^{[1]} = (y_i - a_0)/x_i, \qquad i{=}0,..,n.$$

Коэффициентными решениями задач (10) являются векторы $\vec{a} = (a_0,a_1,\ldots,a_n)$ и $\vec{b} = (a_1,\ldots,a_n,0)$, компоненты которых, исходя из равенста $\vec{a}^{\mathsf{T}} = B^{-1}\,\vec{y}^{\mathsf{T}}$, выражаются так:

$$\begin{array}{lllll} \vec{a}: \quad a_0 = (\vec{v}_0,\vec{y}\,), & a_1 = (\vec{v}_1,\vec{y}\,), & \ldots, & a_n = (\vec{v}_n,\vec{y}\,); & \\ \vec{b}: & a_1 = (\vec{v}_0,\vec{y}^{\,[1]}), & \ldots, & a_n = (\vec{v}_{n-1},\vec{y}^{\,[1]}), & (\vec{v}_n,\vec{y}^{\,[1]}) = 0\,. \end{array}$$

Очевидные преобразования скалярного произведения $(\vec{v}_{k-1},\vec{y}^{\,[1]})$ позволяют привести равенства $a_k = (\vec{v}_k,\vec{y}\,) = (\vec{v}_{k-1},\vec{y}^{\,[1]})$ к виду

$$\sum_{j=0}^{n} v_{kj}\,y_j = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{v_{k-1,j}}{x_j} - s_j\sum_{l=0}^{n}\frac{v_{k-1,l}}{x_l}\right)y_j \qquad (k{=}1,..,n),$$

а поскольку $\vec{y}$ – произвольный вектор, то компоненты k-го вектора $\vec{v}_k$ выражаются следующим образом:

$$v_{kj} = v_{k-1,j}/x_j - s_j\,M_{k-1}, \quad (j{=}0,..,n),$$

$$\text{где} \quad M_{k-1} = \sum_{l=0}^{n}\frac{v_{k-1,l}}{x_l} \;\equiv\; (\vec{v}_{k-1},\vec{w}) \quad \text{при} \quad \vec{w} = (x_0^{-1},\ldots,x_n^{-1}).$$

Равенство $\vec{v}_0 = \vec{s}$ и выражения для компонет $\vec{v}_k$ позволяют сконструировать оператор обращения матриц Вандермонда, заданных ненулевыми узлами интерполирования.

[4]Строго говоря, строками матрицы B^{-1} являются не векторы $\vec{v}_i$, а их компоненты, однако это обстоятельство в настоящем изложении несущественно.

Оператор $ATV|s$: $(\,x_0,\ldots,x_n\,)\to[v_{ij}]$ при условии $x_0\neq 0,\ldots,x_n\neq 0$.

$$\vec{w}=(x_0^{-1},\ldots,x_n^{-1}),$$

$\vec{v_0}=\vec{s}=(s_0,\ldots,s_n)$, где $s_j=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{x_k}{x_k-x_j}$, $\quad j{=}0,..,n$,

$\vec{v_1}=(v_{10},\ldots,v_{1n})$, где $v_{1j}=v_{0j}/x_j-s_j\,M_0$, $\quad j{=}0,..,n$ и $M_0{=}(\vec{w},\vec{v_0})$,

$\vec{v_2}=(v_{20},\ldots,v_{2n})$, где $v_{2j}=v_{1j}/x_j-s_j\,M_1$, $\quad j{=}0,..,n$ и $M_1{=}(\vec{w},\vec{v_1})$,

$\ldots$

$\vec{v_n}=(v_{n0},\ldots,v_{nn})$, где $v_{nj}=v_{n-1,j}/x_j-s_j\,M_{n-1}$, $j{=}0,..,n$ и $M_{n-1}{=}(\vec{w},\vec{v}_{n-1})$. $\square$

Пример 4. Для узлов интерполирования $(\,-1.0,\,-0.5,\,0.5,\,1.0,\,1.5,\,2.0\,)$ из примера 2 оператор $ATV|s$ действует так:

$$\begin{array}{rcl}
 & & \vec{w}=(\;-1\;,\;-2\;,\;2\;,\;1\;,\;2/3,\;1/2\;),\\
\vec{s}=\left(-\dfrac{1}{15},\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{3},-1,\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{15}\right) & \Rightarrow & \vec{v}_0=(-1/15,\;2/5\;,\;4/3,\;-1\;,\;2/5,-1/15\,),\\
M_0=\;\;7/6 & \Rightarrow & \vec{v}_1=(\,13/90,-19/15,\;10/9,\;1/6,-1/5,\;2/45\,),\\
M_1=\;\;14/3 & \Rightarrow & \vec{v}_2=(\;1/6\;,\;2/3\;,\;-4\;,\;29/6,\;-2\;,\;1/3\;),\\
M_2=-35/6 & \Rightarrow & \vec{v}_3=(-5/9\;,\;1\;,-2/9,\;-1\;,\;1\;,-2/9\;),\\
M_3=\;-7/3 & \Rightarrow & \vec{v}_4=(\;2/5\;,-16/15,\;8/3,-10/3,\;8/5,-4/15\,),\\
M_4=\;\;14/3 & \Rightarrow & \vec{v}_5=(-4/45,\;4/15,-8/9,\;4/3,-4/5,\;8/45\,).
\end{array}$$

В окончательном виде полученная операторм $ATV|s$ матрица имеет вид:

$$B^{-1}(-1.0,\,-0.5,\,0.5,\,1.0,\,1.5,\,2.0)=\begin{bmatrix}
-1/15 & 2/5 & 4/3 & -1 & 2/5 & -1/15\\
13/90 & -19/15 & 10/9 & 1/6 & -1/5 & 2/45\\
1/6 & 2/3 & -4 & 29/6 & -2 & 1/3\\
-5/9 & 1 & -2/9 & -1 & 1 & -2/9\\
2/5 & -16/15 & 8/3 & -10/3 & 8/5 & -4/15\\
-4/45 & 4/15 & -8/9 & 4/3 & -4/5 & 8/45
\end{bmatrix}$$

Замечание 3. Если вектор $\vec{x}$ содержит нулевой узел: $\vec{x}=(0,x_1,\,\ldots,x_n)$, то, как следует из замечания 2,

$$B^{-1}(0,x_1,\,\ldots,x_n)\times\vec{y}^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&V\end{bmatrix}\times R\times\vec{y}^{\mathsf{T}}, \tag{11}$$

где $V=B^{-1}(x_1,\,\ldots,x_n)$, а R – матрица линейного преобразования

$$(y_0,y_1,\,\ldots,y_n)^{\mathsf{T}}\quad\to\quad\left(y_0,\frac{y_1-y_0}{x_1},\,\ldots,\frac{y_n-y_0}{x_n}\right)^{\mathsf{T}}.$$

Поскольку равенство (11) справедливо для любого вектора $\vec{y}$, то

$$B^{-1}(0,x_1,\,\ldots,x_n)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & V\end{bmatrix}\times R=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n}\\ 0 & v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -1/x_1 & 1/x_1 & 0 & \ldots & 0\\ -1/x_2 & 0 & 1/x_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -1/x_n & 0 & 0 & \ldots & 1/x_n\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -M'_1 & v_{11}/x_1 & v_{12}/x_2 & \ldots & v_{1n}/x_n\\ -M'_2 & v_{21}/x_1 & v_{22}/x_2 & \ldots & v_{2n}/x_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -M'_n & v_{n1}/x_1 & v_{n2}/x_2 & \ldots & v_{nn}/x_n\end{bmatrix},\quad \text{где}\quad M'_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{v_{kl}}{x_l}.$$

6. Оператор $ATV|d$

Альтернативный оператор $ATV|d$ обращения матрицы Вандермонда также опирается на построчное строение матрицы B^{-1}, но исходит из особенностей оператора $JLL|d$.

Пусть по-прежнему $\vec{x}$ — некоторый набор узлов интерполирования, $\vec{y}$ — произвольный вектор значений, $\vec{a}=(a_0,\ldots,a_n)$ — соответствующее коэффициентное решение. Поскольку равенство $a_n=(\vec{d},\vec{y})=(\vec{v}_n,\vec{y})$ выполняется для любого $\vec{y}$, то $\vec{v}_n=\vec{d}$. Для нахождения остальных векторов $\vec{v}_0,\,\ldots,\,\vec{v}_{n-1}$ рассмотрим две задачи интерполирования:

$$\vec{x}\bowtie\vec{y}\quad \text{и}\quad \vec{x}\bowtie\vec{z}^{\,[n-1]},$$

где $\vec{z}^{\,[n-1]}$ — вектор из оператора $JLL|d$:

$$\vec{z}^{\,[n-1]}=(\,z_0^{[n-1]},\ldots,z_n^{[n-1]}\,),\ \text{где}\ \ z_i^{[n-1]}=(y_i-a_nx_i^n)\,x_i,\qquad i{=}0,..,n.$$

Коэффициентными решениями этих задач являются векторы $\vec{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ и $\vec{b}=(0,a_0,\ldots,a_{n-1})$, компоненты которых выражаются так:

$$\begin{array}{llllll}\vec{a}: & & a_0=(\vec{v}_0,\vec{y})\,, & \ldots\,, & a_{n-1}=(\vec{v}_{n-1},\vec{y})\,, & a_n=(\vec{v}_n,\vec{y})\,;\\ \vec{b}: & (\vec{v}_0,\vec{z}^{\,[n-1]})=0\,, & a_0=(\vec{v}_1,\vec{z}^{\,[n-1]})\,, & \ldots\,, & a_{n-1}=(\vec{v}_n,\vec{z}^{\,[n-1]})\,. & \end{array}$$

Очевидные преобразования скалярного произведения $(\vec{v}_{k+1},\vec{z}^{\,[n-1]})$ позволяют привести равенства $a_k=(\vec{v}_k,\vec{y})=(\vec{v}_{k+1},\vec{z}^{\,[n-1]})$ к виду

$$a_k=\sum_{j=0}^{n}v_{kj}\,y_j=\sum_{j=0}^{n}\left(x_j\,v_{k+1,j}-d_j\sum_{l=0}^{n}v_{k+1,l}\,x_l^{n+1}\right)y_j\qquad (k{=}0,\,\ldots,n{-}1),$$

а поскольку $\vec{y}$ — произвольный вектор, то для элементов k-й строки матрицы $B^{-1}(x_0,\,\ldots,x_n)$ справедливы равенства

$$v_{kj}=x_j\,v_{k+1,j}-d_j\,N_{k+1}\quad (j=0,\,\ldots,n),$$

$$\text{где}\quad N_{k+1}=\sum_{l=0}^{n}v_{k+1,l}\,x_l^{n+1}\equiv(\vec{v}_{k+1},\vec{u})\quad\text{при}\quad \vec{u}=(x_0^{n+1},\ldots,x_n^{n+1}).$$

Равенство $\vec{v}_n=\vec{d}$ и выражения для $\vec{v}_k$ позволяют сконструировать еще один оператор обращения матриц Вандермонда, заданных узлами интерполирования.

Оператор $ATV|d$: $(x_0, \dots, x_n) \to [v_{ij}]$.

$$\vec{u} = (x_0^{n+1}, \dots, x_n^{n+1}),$$

$\vec{v}_n = \vec{d} = (d_0, \dots, d_n)$, где $d_j = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^n (x_j - x_k)^{-1}$, $j=0,..,n$,

$\vec{v}_{n-1} = (v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,n})$, где $v_{n-1,j} = x_j\, v_{nj} - d_j\, N_n$, $j=0,..,n$ и $N_n = (\vec{u}, \vec{v}_n)$,

$\vec{v}_{n-2} = (v_{n-2,0}, \dots, v_{n-2,n})$, где $v_{n-2,j} = x_j\, v_{n-1,j} - d_j\, N_{n-1}$, $j=0,..,n$ и $N_{n-1} = (\vec{u}, \vec{v}_{n-1})$,

$\dots$

$\vec{v}_0 = (v_{00}, \dots, v_{0n})$, где $v_{0j} = x_j\, v_{1j} - d_j N_1$, $j=0,..,n$ и $N_1 = (\vec{u}, \vec{v}_1)$. $\square$

Пример 5. Для узлов интерполирования $(0,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 2.5)$ из примера 3, $n=4$, действие оператора $ATV|d$ выглядит так:

$$\begin{array}{rcl}
 & & \vec{u} = (\ 0,\ 1/32,\ 1,\ 32,\ 3125/32\ ),\\
\vec{d} = \left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{15}\right) & \Rightarrow & \vec{v}_4 = (\ 2/5,\ -4/3,\ 4/3,\ -2/3,\ 4/15\ ),\\
N_4 = 6 & \Rightarrow & \vec{v}_3 = (-12/5,\ 22/3,\ -20/3,\ 8/3,\ -14/15\ ),\\
N_3 = -49/4 & \Rightarrow & \vec{v}_2 = (\ 49/10,\ -38/3,\ 29/3,\ -17/6,\ 14/15\ ),\\
N_2 = 39/4 & \Rightarrow & \vec{v}_1 = (-39/10,\ 20/3,\ -10/3,\ 5/6,\ -4/15\ ),\\
N_1 = -5/2 & \Rightarrow & \vec{v}_0 = (\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ ).
\end{array}$$

В окончательном виде полученная оператором $ATV|d$ матрица имеет вид:

$$B^{-1}(0,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 2.5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -39/10 & 20/3 & -10/3 & 5/6 & -4/15\\ 49/10 & -38/3 & 29/3 & -17/6 & 14/15\\ -12/5 & 22/3 & -20/3 & 8/3 & -14/15\\ 2/5 & -4/3 & 4/3 & -2/3 & 4/15 \end{bmatrix}$$

Самый известный с докомпьютерных времен метод обращения матриц Вандермонда [8] основывается на использовании коэффициентов определенного в п.2 полинома $\omega_n(x)$:

Если $\omega_n(x) = x^{n+1} + A_n\, x^n + \dots + A_1\, x + A_0$, то (с учетом ранее принятых обозначений) элементы j-го столбца ($j=0,..,n$) определяются так:

$$v_{nj} = d_j, \qquad v_{kj} = (x_j^{n-k} + A_n\, x_j^{n-k-1} + \dots + A_{k+1})\, d_j \equiv$$
$$\equiv x_j\, v_{k+1,j} + A_{k+1} d_j \qquad (k=0,..,n-1).$$

Из сравнения выражений для одних и тех же элементов матрицы B^{-1} следует, что $A_i = -N_i$. Отличительная особенность оператора $ATV|d$ состоит в том, что он не предполагает предварительного построения коэффициентов A_i, они конструируются параллельно с построением матрицы B^{-1}.

7. Подсчеты

Зафиксируем некоторое число n, $n \geq 2$, и посчитаем количество операций в определениях операторов $JLL|s$ и $ATV|s$. При этом будем раздельно учитывать (а) операции сложения и вычитания, (б) операции умножения и деления, а также (в) знаки равенства[5].

В качестве примера посчитаем операции в формуле (4) для отдельных компонент вектора $\vec{s}$:

$$s_i = \frac{x_0}{x_0 - x_i} * \dots * \frac{x_{i-1}}{x_{i-1} - x_i} * \frac{x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} * \dots * \frac{x_n}{x_n - x_i}.$$

[5] Строго говоря, знаки равенства для векторных формул можно в расчет не принимать, однако в данном случае учет "лишних" операций на окончательные выводы не влияет.

Оператор	Операции $+\|-$	Операции $*\|/$	Знак $=$
$JLL\|s$	$3n^2+3n$	$4n^2+4n$	$n^2{+}4n{+}3$
В том числе: $\vec{s}=(s_0,\,\dots,s_n),\quad s_i=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} x_j/(x_j{-}x_i)$	$n(n{+}1)$	$(2n{-}1)(n{+}1)$	$n{+}2$
$\vec{y}^{\,[1]}=(y_0^{[1]},\,\dots,y_n^{[1]}),\quad y_i^{[1]}=(y_i-a_0)/x_i$	$n{+}1$	$n{+}1$	$n{+}2$
$\vec{y}^{\,[k]}=(y_0^{[k]},\dots,y_n^{[k]}),$ $k{=}2,..,n;\quad y_i^{[k]}=(y_i^{[k-1]}{-}a_{k-1})/x_i$	$(n{+}1)(n{-}1)$	$(n{+}1)(n{-}1)$	$n^2{+}n{-}2$
$a_0=(\vec{s},\vec{y})$	n	$n{+}1$	1
$a_k=(\vec{s},\vec{y}^{\,[k]}),\quad k{=}1,..,n$	n^2	$(n{+}1)n$	n
$ATV\|s$	$3n^2{+}2n$	$5n^2{+}4n{-}1$	$n^2{+}5n{+}4$
В том числе: $\vec{s}=(s_0,\,\dots,s_n),\quad s_j=\prod_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} x_j/(x_k{-}x_j)$	$n(n{+}1)$	$(2n{-}1)(n{+}1)$	$n{+}2$
$\vec{v}_0=(v_{00},\dots,v_{0n}),\quad v_{0i}=s_i$	0	0	$n{+}2$
$\vec{v}_k=(v_{k0},\dots,v_{kn}),$ $k{=}1,..,n,\quad v_{ki}=v_{k-1,i}/x_i{-}s_iM_{k-1}$	$(n{+}1)n$	$2(n{+}1)n$	$(n{+}2)n$
$M_k=\sum_{j=0}^{n} v_{kj}/x_j,\quad k{=}0,..,n{-}1$	n^2	$(n{+}1)n$	n

Табл. 1. Подсчет числа операций в определениях операторов $JLL|s$ и $ATV|s$

В этой формуле (а) n операций сложения/вычитания, (б) $2n{-}1$ операций умножения/деления[6], (в) 1 (один) знак равенства. В общей сложности формула для компоненты s_i содержит $(n){+}(2n{-}1){+}1 = 3n$ операций.

Результаты и детали подсчета операций для операторов $JLL|s$ и $ATV|s$ приводятся в таблице 1. Суммарно эти операторы содержат соответственно $8\,n^2{+}11\,n{+}3$ и $9\,n^2{+}11\,n{+}3$ операций. Вместе с тем, общее количество операций естественно разделять на две части. К первой части относятся операции построения инструментальных векторов, ко второй – операции конструирования искомых коэффициентов. При этом суммарное количество операций оператора $JLL|s$ подразделяется на два слагаемых: $3\,n^2{+}3\,n{+}1$ и $5\,n^2{+}8\,n{+}2$. Аналогично, суммарное количество операций оператора $ATV|s$ подразделяется на $3\,n^2{+}3\,n{+}1$ и $6\,n^2{+}8\,n{+}2$.

Как следует из приведенных подсчетов, операторы $JLL|s$ и $ATV|s$ имеют один и тот же порядок сложности $O(n^2)$ (см. [1]). Операторы $JLL|d$ и $ATV|d$ также имеют оценки сложности $O(n^2)$, однако в настоящей работе они не выводятся, поскольку требуют некоторых оговорок.

Отметим два обстоятельства. Во-первых, для построения всех элементов матрицы B^{-1} требуется не менее $(n{+}1)^2$ операций[7], то есть все операторы обращения матриц Вандермонда с оценкой сложности $O(n^2)$ являются “асимптотически наилучшими”. В-вторых, в теории вычислений доказано [7] существование методов интерполяции с оценкой сложности $O(n\,log^2 n)$, то есть начиная с некоторого значения n_0 операторы $JLL|*$, будут проигрывать по числу задействованных операций. Доказательство этого факта опирается на свойства быстрого преобразования Фурье [1] и сведения из теории

[6] $n{-}1$ умножений и n делений

[7] Тривиальная нижняя граница сложности [5] задачи построения B^{-1} есть $O(n^2)$.

```
procedure ATVs(var V : matr; var X : vect; N : integer);
   var I,J : integer;
         M : real;
begin   for I:=0 to N do begin
           V[0,I]:=1;
           for J:=0 to N do
           if I <> J then V[0,I]:=V[0,I]*X[J]/(X[J]-X[I])
        end;
        for I:=1 to N do begin
           M:=1;
           for J:=0 to N do      M:=V[I-1,J]/X[J]+M;
           for J:=0 to N do V[I,J]:=V[I-1,J]/X[J]-M*V[0,J]
        end                                            end;
```

Алгоритм 1. Реализация оператора $ATV|s$ на языке Паскаль.

функций комплексной переменной [2].

8. Предупреждение об опасности

На первый взгляд операторы $JLL|*$ и $ATV|*$ раз и навсегда решают задачу интерполяции. В самом деле, алгоритмическое представление[8] (см. алгоритм 1), скажем, оператора $ATV|s$ выглядит и лаконично, и привлекательно. Однако полагаться на непосредственную алгоритмическую реализацию описанных операторов следует с осторожностью.

Во-первых, формулы (4) для нахождения векторов $\vec{s}$ и $\vec{d}$ предполагают вычисление произведений. Если, например, все узлы интерполирования расположены на сегменте длины 0.5, то $|d_i| \geq 2^n$, и это обстоятельство грозит потерей точности при значительных n. Во-вторых, все операторы используют последовательный характер нахождения коэффициентов интерполяционного полинома или строк обратной матрицы. Это значит, что ошибки округления, допущенные на одном этапе, окажут негативное влияние на все последующие этапы.

Не изменяя операторов, полностью устранить действие перечисленных негативных факторов невозможно. Если тем не менее операторы используются для численных расчетов, то для оценки качества полученных результатов можно использовать отклонения в тождествах:

$$
\begin{aligned}
& & y_j^{[err]} = z_j^{[err]} &= 0 \quad (j{=}0,..,n). & (12)\\
s_0 + \cdots + s_n &= & v_{00} + \cdots + v_{0n} &= 1, & (13)\\
& & v_{i0} + \cdots + v_{in} &= 0 \quad (i{=}1,..,n{-}1), & (14)\\
d_0 + \cdots + d_n &= & v_{n0} + \cdots + v_{nn} &= 0, & (15)
\end{aligned}
$$

Тождества (12) дублируют следствия 1 и 2. Тождества (13)–(15) следуют из установленных равенств $\vec{v}_0{=}\vec{s}$ и $\vec{v}_n{=}\vec{d}$, а также из того факта, что коэффициентным решением интерполяционной задачи $(x_0, x_1\, \ldots, x_n) \bowtie (1, 1, \ldots, 1)$ является вектор $(1, 0, \ldots, 0)$.

Пример 6. Компьютерные вычисления с использованием коротких вещественных чисел[9] для задачи интерполирования

$$(-1.0007,\ -0.5,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0\,) \bowtie (\,19.1,\ 4.7,\ 2.3,\ 5.9,\ 11.1,\ 1.7\,),$$

[8]для случая $n \leq 40$ при

```
type vect = array [0..40] of real;
     matr = array [0..40] of vect;
```

[9]чисел с длиной мантиссы 24 бита.

округленно дают следующее коэффициентное решение:

$$(+2.1026,\ -1.8057,\ +3.9935,\ -1.5782,\ +6.3843,\ -3.1965),$$

при этом $s_0+\cdots+s_5 \approx 1-0.1\cdot 10^{-6}$ и $|y_0^{[err]}|+\cdots+|y_5^{[err]}| \approx 8.8\cdot 10^{-6}$. Можно ли считать такие отклонения приемлемыми, в конечном счете зависит от особенностей приложения, в интересах которого решается задача интерполирования.

Отметим, что задачи интерполирования из примеров 2 и 6 отличаются "всего" на 0.0007 в единственном узле интерполирования, однако полученные коэффициентные решения отличаются более радикально:

$$(+0.0026,\ -0.0057,\ -0.0065,\ +0.0218,\ -0.0157,\ +0.0035),$$

Оказывается [3, 6], явления такого рода вполне закономерны, и (в вольном изложении) плохо подготовленные исходные данные приводят к негодным решениям.

9. Заключение

Представленные рассуждения можно рассматривать как элементарное введение в интерполяцию, содержащее точные постановки задач, обоснования и описания решающих операторов. Вместе с тем, материал содержит также "точки роста", которые в тексте начинаются со слов "Отметим" и которые ориентированы на углубленное изучение интерполяции, включающее в себя вопросы разработки быстрых и устойчивых методов, пригодных для компьютерной реализации.

Литература

[1] Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. - М.: ИД Вильямс, 2005.

[2] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Физматлит, 2010.

[3] Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. - М.: ИЦ Академия, 2007.

[4] Тыртышников Е.Е. Основы алгебры. - М.: Физматлит, 2017.

[5] Ульянов М.В. Ресурсно-эффективные компьютерные алгоритмы: разработка и анализ. - М.: Физматлит, 2008.

[6] Beckermann B. The condition number of real Vandermonde, Krylov and positive definite Hankel matrices // Numerische Mathematik. - vol. 85. - No. 4. - 2000. - P. 553-577.

[7] Borodin A. Munro I. The computational complexity of algebraic and numeric problems. - New York-London-Amsterdam: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1975.

[8] Traub J.F. Associated polynomials and uniform methods for the solution of linear problems // SIAM Review. - vol. 7. - No. 3. - 1966. - P. 277-301.

[9] Trefethen L.N. - Approximation Theory and Approximation Practice. - Oxford, UK: SIAM, 2013.

Соловьев Сергей Юрьевич,
заведующий кафедрой алгоритмических языков
факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова,
профессор, доктор физ.-мат.наук

E-mail: soloviev@glossary.ru