ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 512.622 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-240-251

Об одном классе множителей многочленов Чебышева

С. Ю. Соловьев

Соловьев Сергей Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: soloviev@glossary.ru

Аннотация

В статье посредством специально сконструированных узлов определяется класс многочленов $D_n(x)$, каждый из которых является множителем многочлена Чебышева первого рода $T_{2n}(x)$. Сформулирована задача исследования многочленов $D_n(x)$ на отрезке $[0, 1]$, в рамках которой получены точные выражения и оценки значений на границах и в специальных узлах.

Ключевые слова: многочлены Чебышева, функция Лобачевского, оценки.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
С. Ю. Соловьев. Об одном классе множителей многочленов Чебышева // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 240–251.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 512.622 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-240-251

On a class of factors of the Chebyshev polynomials

S. Y. Soloviev

Soloviev Sergey Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: soloviev@glossary.ru

Abstract

The article defines a class of $D_n(x)$ polynomials by specially designed nodes. Each of $D_n(x)$ is the factor of the Chebyshev polynomial of the first kind $T_{2n}(x)$. The research task for polynomials $D_n(x)$ on the interval [0,1] is reduced to find values $D_n(x)$. The article contains exact expressions and estimates of values $D_n(x)$ in special nodes.

Keywords: Chebyshev polynomials, Lobachevsky function, estimations.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
S. Y. Soloviev, 2021, “On a class of factors of the Chebyshev polynomials”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 240–251.

1. Введение

Пусть n – некоторое натуральное число. Введем в рассмотрение положительные числа (узлы)

$$x_k = \sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}, \quad k{=}0\ldots,n{-}1\,,$$

и определим многочлен D_n следующим образом:

$$D_n(x) = (x+x_0)(x+x_1)\cdots(x+x_{n-1})\,.$$

Многочлены D_n представляют интерес как множители [1] многочленов Чебышева [2]; равенство

$$T_{2n}(x) = (-1)^n\, 2^{2n-1}\, D_n(x)\, D_n(-x)\,. \tag{1}$$

где $T_{2n}(x)$ – многочлен Чебышева первого рода степени $2n$, сомнений не вызывает.

На отрезке $[0,1]$ многочлен $D_n(x)$ монотонно возрастает (рис.1). Вместе с тем, поведение многочлена на “самом интересном“ участке $[-1,0]$, содержащем все нули и локальные экстремумы, лимитируется (рис.2) его поведением на упомянутом отрезке $[0,1]$:

$$|D_n(x)| \;=\; \frac{2}{2^{2n}}\,\frac{|T_{2n}(x)|}{D_n(-x)} \;\leqslant\; \frac{2}{2^{2n}}\,\frac{1}{D_n(-x)} \qquad \forall x\in[-1,0]\,. \tag{2}$$

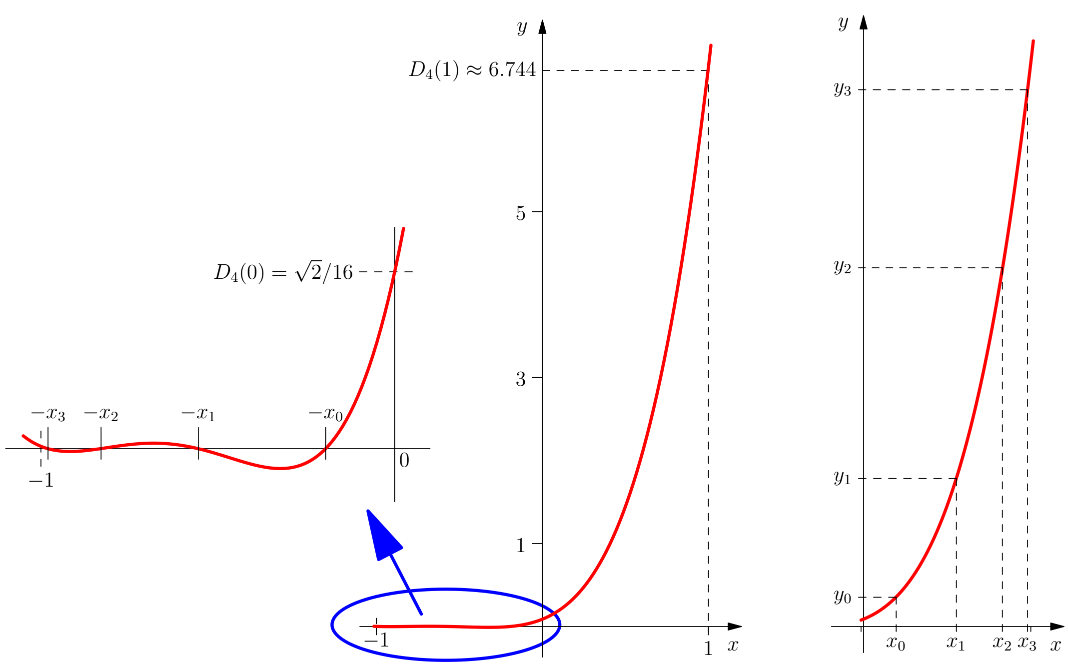

Рис. 1. График функции $D_4(x)$.

Последнее обстоятельство заставляет внимательнее присмотреться к особенностям монотонного возрастания D_n на отрезке $[0,1]$. Как вариант исследования особенностей $D_n(x)$ в настоящей работе ставится задача выразить значения $D_n(x)$ в узлах x_k – суть числа $y_k = D_n(x_k)$. Кроме того, рассматривается вопрос о значениях $D_n(x)$ в граничных точках отрезка – числа $D_n(0)$ и $D_n(1)$.

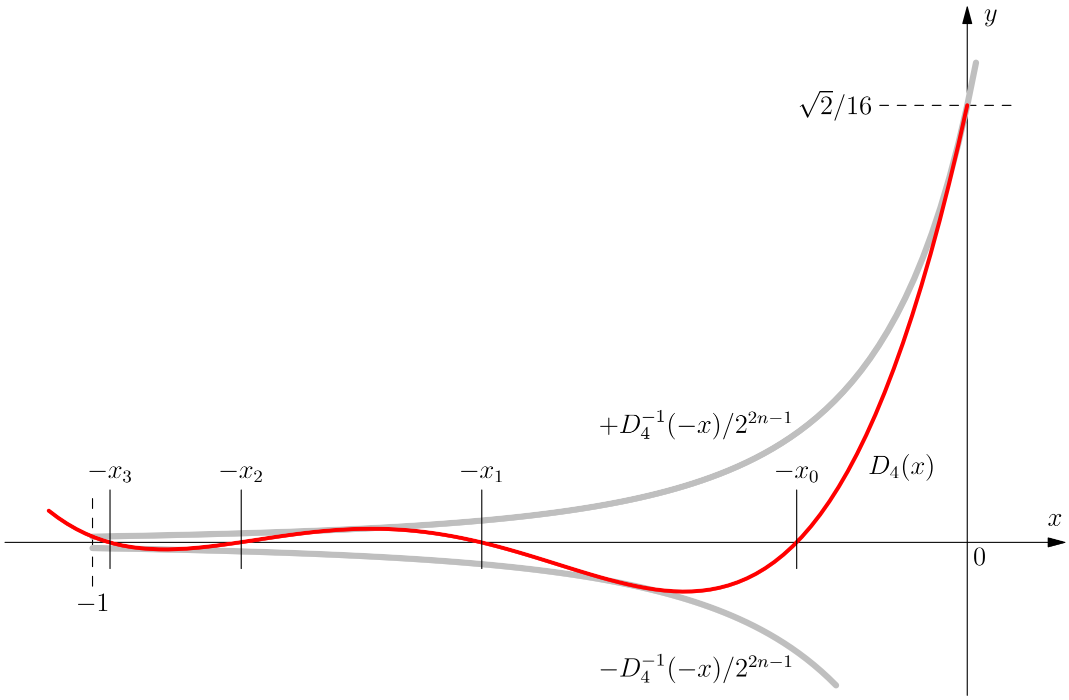

Рис. 2. Многочлен $D_4(x)$ на отрезке $[-1,0]$.

2. Примеры и соглашения

Многочлены $D_n(x)$ выглядят буквально антиподами многочленов Чебышева. Узлы x_k (равно корни $-x_k$), значения y_k и даже коэффициенты $D_n(x)$ выражаются посредством иррациональных выражений. Приведем первые четыре многочлена.

$$n=1,\quad x_0=\sqrt{2}/2\,,\qquad D_1(x)=x+\sqrt{2}/2\,;$$

$$n=2,\quad x_{0,1}=\sqrt{2\pm\sqrt{2}}\Big/\,2\,,\qquad D_2(x)=x^2+d_{21}\,x+\sqrt{2}/4\,,\qquad d_{21}\approx 1.3066\,;$$

$$n=3,\quad x_{0,2}=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{2}},\quad x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad D_3(x)=x^3+d_{32}\,x^2+d_{31}\,x+\sqrt{2}/8\,,$$
$$d_{32}\approx 1.9319,\ d_{31}\approx 1.1160;$$

$$n=4,\quad x_k=\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}\Big/\,2\,,\qquad D_4(x)=x^4+d_{43}\,x^3+d_{42}\,x^2+d_{41}\,x+\sqrt{2}/16\,,$$
$$d_{43}\approx 2.5629,\ d_{42}\approx 2.2843,\ d_{41}\approx 0.8086;$$

соответственно
для $n=1$, $y_0\approx 1.4142$,
для $n=2$, $y_0=1.0000$, $y_1\approx 2.4142$,
для $n=3$, $y_0\approx 0.6124$, $y_1\approx 2.2854$, $y_2\approx 3.9584$,
для $n=4$, $y_0\approx 0.3536$, $y_1\approx 1.7774$, $y_2\approx 4.2911$, $y_3\approx 6.4221$.

В большинстве случаев точные выражения для значений $D_n(x)$ выглядят весьма громоздко, поэтому переход от точных значений к оценкам диапазонов их варьирования выглядит вполне уместным.

Далее для задания оценок используются двойные неравенства $V_1<V<V_2$, в которых V_1 и V_2 именуются соответственно нижней и верхней оценками величины V. Кроме того, во всех последующих рассуждениях полагаем $n\geqslant 4$.

В оценках для значений $D_n(x)$ существенно используется константа $E \overset{def}{=} 0.5\,\exp(4G/\pi)$, где G – постоянная Каталана, $G = 0.915965\ldots$.

$$E = 1.604956\ldots\,.$$

3. Основное утверждение

Элементарные преобразования выражения $D_n(x_k)$ с использованием формул приведения и формулы для суммы синусов позволят получить общее выражение для значений y_k.

$$y_k = 2^n \prod_{i=1}^{k} \cos\frac{\pi i}{4n} \prod_{j=k+1}^{2n-1} \sin\frac{\pi j}{4n}\,, \qquad k = 0,\ldots,n{-}1\,, \tag{3}$$

откуда

$$y_k = y_{k-1}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi k}{4n}\,, \qquad k = 1,\ldots,n{-}1\,. \tag{4}$$

Утверждение 1. *Для любого $n \geqslant 4$ имеют место следующие соотношения:*

$$D_n(0) = \sqrt{2}/2^n, \tag{5}$$

$$y_0 = \sqrt{2n}/2^{n-1}, \tag{6}$$

$$E^n\,e^{-0.158/n} \;<\; y_{n-1} \;<\; E^n\,e^{0.072/n}. \tag{7}$$

Доказательство. Значение $D_n(0)$ выводится из равенств (1) и $T_{2n}(0) = (-1)^n$. Для случая $k = 0$ формула (3) превращается в

$$y_0 = 2^n \prod_{j=1}^{2n-1} \sin\frac{\pi j}{4n}\,.$$

Выражение для y_0 следует из формулы Эйлера, которая [3] (для $4\,n$ штук слагаемых и $x > 0$) может быть представлена в виде

$$\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{4n}} = 2^{4n-1} \prod_{k=1}^{4n-1} \sin\frac{x + k\pi}{4n}$$

и при $x \to 0$

$$4n = 2^{4n-1} \prod_{k=1}^{4n-1} \sin\frac{k\pi}{4n} = 2^{2n-1}\left(2^n \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{4n}\right)^2 \sin\frac{2n\pi}{4n} = 2^{2n-1} y_0^2 \qquad\Longrightarrow\qquad y_0 = \frac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}.$$

Доказательство оценки (7) приводится в секции 5. □

4. Вспомогательные оценки

Пусть $n \geqslant 4$ – целое число. Обозначим:

$$R_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tg}^2\,\frac{(2i{-}1)\pi}{8n}\,, \qquad S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} \ln\cos\frac{\pi i}{4n}.$$

Для вывода оценки (7) необходимо иметь оценку суммы S_n (секция 4.4),
для вывода которой необходимо получить оценку суммы R_n (секция 4.3),
для вывода которой требуется получить оценку функции $\mathrm{ctg}\,x$ (секция 4.2).

4.1. Инструментальная подготовка

Приведем известные, но рассредоточенные по разным работам утверждения, составляющие “инструментальную“ основу последующих рассуждений.

Функция Лобачевского $L(x)$ в современной специальной литературе [4, 5, 6] определяется различными, хотя и взаимно сводимыми способами. Для наших целей интерес представляет определение функции Лобачевского на множестве $[0, \pi/4]$ вида

$$L(x) = -\int\limits_0^x \ln(\cos t)\, dt\,.$$

Известно [7], что $L(\pi/4) \;=\; (\pi\,\ln 2)/4 - G/2 \;\equiv\; G/2 - (\pi \ln E)/4$.

Тригамма-функция $\psi'(x)$ [8, §6.4] для $x > 0$ задается рядом

$$\psi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \qquad [9, \S II.4]$$

Установлено [10, теорема 4], что для $x > 0$ имеет место оценка

$$\widehat{B}(x) \;<\; \psi'(x) \;<\; B(x)\,, \quad \text{где} \quad B(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3}\,, \quad \widehat{B}(x) = B(x) - \frac{1}{30x^6}\,.$$

Следствие 1.

$$\frac{197}{198}\,\frac{1}{n} \;<\; \psi'(n+\tfrac{1}{2}) \;<\; \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \geqslant 4\,. \tag{8}$$

В самом деле

$$B(n+\tfrac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{n}\, n\, B(n+\tfrac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{3\,(2n+1)^2} - \frac{2}{3\,(2n+1)^3}\right) \;<\; \frac{1}{n}\,,$$

а поскольку функция $\beta(x) = x\widehat{B}(x+\tfrac{1}{2})$ монотонно возрастает при $x \geqslant 4$, то

$$\widehat{B}(n+\tfrac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{n}\, n\, \widehat{B}(n+\tfrac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{n}\,\beta(n) \;>\; \frac{1}{n}\,\beta(4) \;>\; \frac{197}{198}\,\frac{1}{n}\,. \qquad \square$$

Квадратурные формулы [11, 12] разрабатывались для вычисления интегралов. Вместе с тем, в квадратурных формулах фигурируют величины, для которых известны лишь диапазоны варьирования, что позволяет использовать эти формулы для построения оценок. Конкретно, для функций из $C^{(2)}[a, b]$ квадратурные формулы левых, средних и правых прямоугольников выглядят так:

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b f(x)\, dx \;&=\; (b-a)\, f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\, f'(\nu) \;=\; (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}\, f''(\xi) \;= \\ &=\; (b-a)\, f(b) - \frac{(b-a)^2}{2}\, f'(\zeta) \qquad \textit{для нек. } \nu,\, \xi,\, \zeta \textit{ из } (a,b). \end{aligned} \tag{9}$$

Если дополнительно на отрезке $[a, b]$ задана сетка равноотстоящих узлов

$$a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b, \qquad u_i = (b-a)\, i/n\,,$$

то для нахождения интеграла можно воспользоваться обобщенной формулой прямоугольников [11, 12]

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \;=\; \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{u_{i-1}+u_i}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^2}\, f''(\eta) \qquad \textit{для нек. } \eta \in (a,b).$$

Следствие 2. *Если область интегрирования есть отрезок* $[0,\pi/4]$, *а* $f(x) = -\ln\cos x$, *то обобщенная формула прямоугольников принимает вид*

$$-\int\limits_0^{\pi/4} \ln\cos x\,dx \;=\; -\frac{\pi}{4n}\sum_{i=1}^{n} \ln\cos\frac{(2\,i{-}1)\pi}{8n} + \frac{\pi^3}{4^3}\,\frac{1}{24n^2}\,(1+\mathrm{tg}^2\,\eta) \qquad \textit{для нек. } \eta\in(0,\pi/4).$$

То есть

$$\frac{4n}{\pi}\,L(\pi/4) \;=\; -\sum_{i=1}^{n} \ln\cos\frac{(2\,i{-}1)\pi}{8n} + \frac{\pi^2}{384\,n}\,(1+\mathrm{tg}^2\,\eta)\,.$$

Положим $F = \sqrt{E/2} = \exp(-4\,L(\pi/4)/\pi) \equiv 0.5\,\exp(2G/\pi) = 0.89581\ldots$, и тогда

$$\prod_{i=1}^{n} \cos\frac{(2\,i{-}1)\pi}{8n} \;=\; F^n\,\exp\left(\frac{\pi^2\,\mu}{384}\,\frac{1}{n}\right) \qquad \text{для нек. } \mu\in(1,2). \tag{10}$$

4.2. Оценка котангенса

Докажем оценку

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{5}\,x \;\leqslant\; \mathrm{ctg}\,x \;\leqslant\; \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\,x \qquad \forall x\in(0,\pi/4]\,. \tag{11}$$

Вывод оценки (11) состоит из двух этапов.

Этап 1/2. Зафиксируем грубую оценку котангенса:

$$1/x - x \;<\; \mathrm{ctg}\,x \;<\; 1/x \qquad\qquad \forall x\in(0,\pi/4]\,. \tag{12}$$

В самом деле, верхняя оценка следует из того факта, что ряд Маклорена для тангенса состоит только из положительных членов: $\mathrm{tg}(x) = x + x^3/3 + \cdots$, то есть $x < \mathrm{tg}\,x$. Нижняя оценка неравенства (12) устанавливается [13] так:

$$\mathrm{ctg}\,x \;=\; \frac{\cos x}{\sin x} \;>\; \frac{\cos x}{x} \;>\; \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \;>\; \frac{1-x^2}{x} \;=\; \frac{1}{x} - x\,.$$

Этап 2/2. Уточним оценку (12). С целью уточнения нижней оценки рассмотрим последовательность чисел $b_0, b_1, b_2, \ldots$, в которой $b_0 = 1,\; b_{n+1} = b_n/4 + 3/10$. Для этой последовательности справедливы три свойства:

1. $0 < b_n \leqslant 1 \quad \forall\, n \geqslant 0$;
2. $b_n \to 2/5$ при $n\to\infty$;
3. $\mathrm{ctg}(x) > 1/x - b_n x \quad \forall\, n\geqslant 0$;

Второе свойство вытекает из представления $b_n = 2/5 + b'_n$, а третье свойство доказывается по индукции и при этом существенно используются отношения:

$$\mathrm{ctg}\,x \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{ctg}(x/2) - \frac{1}{\mathrm{ctg}(x/2)}\right) \qquad \text{и} \qquad -\frac{1}{4-b_n x^2} \;>\; -\frac{3}{10} \;\text{ при }\; b_n x^2 \;\leqslant\; 2/3\,.$$

Свойства 2 и 3 фактически устанавливают нижнюю оценку из (11). Верхняя оценка устанавливается аналогично.

Следствие 3. *Если* $x = \pi/(4n)$, *то*

$$\frac{4n}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{40}\,\frac{1}{n^2}\right) \;<\; \mathrm{ctg}\,x \;<\; \frac{4n}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{48}\,\frac{1}{n^2}\right). \tag{13}$$

4.3. Оценка суммы R_n

Докажем, что для $n \geqslant 4$ имеет место оценка

$$0.256\, n \ \leqslant\ R_n \ \leqslant\ 0.389\, n\,. \tag{14}$$

Вывод оценки (14) состоит из четырех этапов.

Этап 1/4. Применение известной формулы [14, §4.4.7] для суммы $\sum \operatorname{tg}^2(\cdot)$ сводит задачу оценки R_n к оценке величины C_n:

$$R_n \ =\ \sum_{i=1}^{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{(2i{-}1)\pi}{8n} - C_n = 8n^2 - 2n - C_n\,, \quad \text{где} \quad C_n \ =\ \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ctg}^2 \frac{(2i{-}1)\pi}{8n}\,.$$

Этап 2/4. Неравенство (11) позволяет оценить числа C_n:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8n}{(2i{-}1)\pi} - \frac{2}{5}\, \frac{(2i{-}1)\pi}{8n} \right)^2 \ \leqslant\ C_n \ \leqslant\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8n}{(2i{-}1)\pi} - \frac{1}{3}\, \frac{(2i{-}1)\pi}{8n} \right)^2 .$$

Откуда

$$C_n \ \leqslant\ \left(\frac{8n}{\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i{-}1)^2} - \frac{2}{3}\, n + \frac{1}{9} \left(\frac{\pi}{8n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} (2i{-}1)^2$$

$$C_n \ \geqslant\ \left(\frac{8n}{\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i{-}1)^2} - \frac{4}{5}\, n + \frac{4}{25} \left(\frac{\pi}{8n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} (2i{-}1)^2$$

подставляя известные выражения [14, §4.1.3], [4, §0.12] для сумм нечетных чисел, имеем:

$$C_n \ \leqslant\ \frac{64\, n^2}{\pi^2} \frac{1}{8} \left(\pi^2 - 2\psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right)\right) - \frac{2}{3}\, n + \frac{1}{9} \frac{\pi^2}{64\, n^2} \frac{1}{3} \left(4n^3{-}n\right)$$

$$C_n \ \geqslant\ \frac{64\, n^2}{\pi^2} \frac{1}{8} \left(\pi^2 - 2\psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right)\right) - \frac{4}{5}\, n + \frac{4}{25} \frac{\pi^2}{64\, n^2} \frac{1}{3} \left(4n^3{-}n\right)$$

и, наконец,

$$C_n \ \leqslant\ 8\, n^2 - \frac{16\, n^2}{\pi^2} \psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\, n + \frac{\pi^2}{432}\, n - \frac{\pi^2}{1728}\, \frac{1}{n}$$

$$C_n \ \geqslant\ 8\, n^2 - \frac{16\, n^2}{\pi^2} \psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right) - \frac{4}{5}\, n + \frac{\pi^2}{300}\, n - \frac{\pi^2}{1200}\, \frac{1}{n}$$

Этап 3/4. Комбинируя результаты этапов 1/4 и 2/4, а также избавляясь от одного несущественного слагаемого в левой части двойного неравенства, имеем:

$$\frac{16\, n^2}{\pi^2}\, \psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{3} {+} \frac{\pi^2}{432}\right) n \ \leqslant\ R_n \ \leqslant\ \frac{16\, n^2}{\pi^2}\, \psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right) - \left(\frac{6}{5} {+} \frac{\pi^2}{300}\right) n + \frac{\pi^2}{1200}\, \frac{1}{n}\,.$$

Этап 4/4. Комбинируя результат этапа 3/4 и оценку (8), имеем:

$$\left(\frac{16}{\pi^2}\, \frac{197}{198} - \frac{4}{3} {-} \frac{\pi^2}{432}\right) n \ \leqslant\ R_n \ \leqslant\ \left(\frac{16}{\pi^2} - \frac{6}{5} {-} \frac{\pi^2}{300}\right) n + \frac{\pi^2}{1200}\, \frac{1}{n}\,.$$

Избавляясь за счет разумных округлений от слагаемого с n^{-1}, окончательно получаем оценку (14).

4.4. Оценка суммы S_n

Докажем, что для $n \geqslant 4$ имеет место оценка

$$\frac{\ln E - \ln 2}{2}\,n + \frac{\ln 2}{4} - 0.079\,\frac{1}{n} \;<\; S_n \;<\; \frac{\ln E - \ln 2}{2}\,n + \frac{\ln 2}{4} + 0.036\,\frac{1}{n}\,. \tag{15}$$

Вывод оценки (15) состоит из пяти этапов.

Этап 1/5. Положим $\Delta = \pi/(8n)$ и определим интегралы

$$L_0 \;=\; -\int\limits_0^{\Delta} \ln\cos x\,dx\,, \qquad L_1 \;=\; -\int\limits_{\Delta}^{\pi/4-\Delta} \ln\cos x\,dx\,, \qquad L_2 \;=\; -\int\limits_{\pi/4-\Delta}^{\pi/4} \ln\cos x\,dx\,.$$

В результате применения к интегралам L_0 и L_2 квадратурных формул соответственно левых и правых прямоугольников (9) получим:

$$0 \;<\; L_0 \;<\; \frac{\pi^2}{256n^3}\,, \qquad\qquad \frac{\pi\ln 2}{16n} \;-\; \frac{\pi^2}{128n^2} \;<\; L_2 \;<\; \frac{\pi\ln 2}{16n} \;-\; \frac{\pi^3}{1024n^3}\,,$$

то есть

$$\frac{\pi\ln 2}{16n} \;-\; \frac{\pi^2}{128n^2} \;<\; L_0 + L_2 \;<\; \frac{\pi\ln 2}{16n} \;+\; \frac{\pi^2\,(4-\pi)}{1024n^3}\,. \tag{16}$$

Этап 2/5. Разобьем область интегрирования интеграла L_1 на $n{-}1$ штук отрезков

$$\left[\frac{\pi i}{4n} - \Delta\,,\; \frac{\pi i}{4n} + \Delta\right] \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

Применяя для каждого отрезка квадратурную формулу средних прямоугольников (9) и суммируя полученные выражения, имеем:

$$L_1 \;=\; -\frac{\pi}{4n}S_n \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n-1}(1+\operatorname{tg}^2\xi_i) \;=\; -\frac{\pi}{4n}S_n \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^3 \left(n{-}1 + \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{tg}^2\xi_i\right), \tag{17}$$

где $1{+}\operatorname{tg}^2\xi_i$ – значение $(-\ln\cos x)''$ в некоторой точке ξ_i i–го отрезка разбиения.

Этап 3/5. Учет монотонности функции $\operatorname{tg}(x)$ и диапазонов варьирования величин ξ_i позволяет выписать следующие ограничения

$$R_n{-}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}{-}\Delta\right) \;<\; \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{tg}^2\xi_i \;<\; R_n{-}\operatorname{tg}^2\Delta \qquad \Longrightarrow \qquad R_n{-}1 \;<\; \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{tg}^2\xi_i \;<\; R_n\,. \tag{18}$$

Этап 4/5. Очевидное равенство $L(\pi/4) = L_0 + L_1 + L_2$ для функции Лобачевского $L(x)$ позволяет преобразовать равенство (17) к виду:

$$S_n \;=\; \frac{4n}{\pi}\,(L_0 + L_2 - L(\pi/4)) \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2 \left(n{-}1 + \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{tg}^2\xi_i\right) \tag{19}$$

Этап 5/5. Подставляя в (19) оценки (16) и (18), имеем:

$$S_n \;<\; \frac{4n}{\pi}\left(\frac{\pi\ln 2}{16n} \;+\; \frac{\pi^2\,(4-\pi)}{1024n^3} - L(\pi/4)\right) \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2 (n{-}1 + R_n)$$

$$S_n \;>\; \frac{4n}{\pi}\left(\frac{\pi\ln 2}{16n} \;-\; \frac{\pi^2}{128n^2} - L(\pi/4)\right) \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2 (n{-}1 + R_n - 1)\,.$$

В результате эквивалентных преобразований (с учетом равенства $4L(\pi/4)/\pi = (\ln 2 - \ln E)/2$) последние неравенства трансформируются в

$$\begin{aligned} S_n &< \frac{\ln E - \ln 2}{2}\, n + \frac{\ln 2}{4} + \left(\frac{\pi^2}{384} + \frac{\pi^2}{384}\,\frac{R_n}{n}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{\pi(4-\pi)}{256} - \frac{\pi^2}{384}\right)\frac{1}{n^2} \\ S_n &> \frac{\ln E - \ln 2}{2}\, n + \frac{\ln 2}{4} + \left(\frac{\pi^2}{384} + \frac{\pi^2}{384}\,\frac{R_n}{n} - \frac{\pi}{32} - \frac{\pi^2}{192}\,\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Отбрасывание отрицательного слагаемого с n^{-2}, учет ограничения $n \geqslant 4$ и выполнение арифметических операций с разумными округлениями приводит к оценке (15).

5. Заключительная часть доказательства основного утверждения

Для доказательства оценки (7) заметим, что

$$y_{n-1} = \frac{2^n}{\sqrt{2}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\cos\frac{\pi i}{4n}\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad y_{n-1} = \frac{2^n}{\sqrt{2}}\, e^{2S_n}\,.$$

Оценка (15) суммы S_n позволяет вывести ограничения для y_{n-1}:

$$\frac{2^n}{\sqrt{2}}\exp\left(n\,\ln(E/2) + \frac{\ln 2}{2} - 0.158\,\frac{1}{n}\right) < y_{n-1} < \frac{2^n}{\sqrt{2}}\exp\left(n\,\ln(E/2) + \frac{\ln 2}{2} + 0.072\,\frac{1}{n}\right),$$

которые после эквивалентных преобразований трансформируются в оценку (7).

Следствие 4. *Для любого $n \geqslant 4$ имеют место оценки:*

$$\frac{2^{3/2}}{\pi}\,\frac{n^{3/2}}{2^{n-2}}\left(1 - \frac{\pi^2}{40}\,\frac{1}{n^2}\right) < y_1 < \frac{2^{3/2}}{\pi}\,\frac{n^{3/2}}{2^{n-2}}\left(1 - \frac{\pi^2}{48}\,\frac{1}{n^2}\right), \tag{20}$$

$$E^n\, e^{0.051/n} < D_n(+1) < E^n\, e^{0.103/n}, \tag{21}$$

$$2\left(\frac{1}{4\,E}\right)^n e^{-0.103/n} < |D_n(-1)| < 2\left(\frac{1}{4\,E}\right)^n e^{-0.051/n}; \tag{22}$$

для справки: $(4\,E)^{-1} = 0.23820\ldots$.

Доказательство. Неравенство (20) следует из оценки (13):

$$y_1 = y_0\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}\,\frac{4n}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{40}\,\frac{1}{n^2}\right) < y_1 < \frac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}\,\frac{4n}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{48}\,\frac{1}{n^2}\right)$$

Для доказательства оценки (21) достаточно выполнить очевидные тригонометрические преобразования и воспользоваться равенством (10), в котором $1 < \mu < 2$:

$$D_n(1) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 + x_k) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \cos\frac{(2k{+}1)\pi}{4n}\right) = 2^n\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k{-}1)\pi}{8n}\right)^2 = E^n\exp\left(\frac{\pi^2\mu}{192}\,\frac{1}{n}\right)$$

Оценка (22) вытекает из неравенства (2) при $x = -1$. □

6. Заключение

Положим $\widetilde{D}_n(x) = 2^{n-1/2} D_n(x)$, тогда основные результаты, зафиксированные в соотношениях (1), (4)–(7) и (20)–(22), несколько упрощаются:

$$T_{2n}(x) = (-1)^n\, \widetilde{D}_n(x)\, \widetilde{D}_n(-x)\,, \tag{1$'$}$$

$$\widetilde{D}_n(x_k) = \widetilde{D}_n(x_{k-1}) \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{4n}\,, \qquad k = 1, \dots, n-1\,, \tag{4$'$}$$

$$\widetilde{D}_n(0) = 1\,, \tag{5$'$}$$

$$\widetilde{D}_n(x_0) = 2\sqrt{n}, \tag{6$'$}$$

$$(2E)^n\, e^{-0.158/n} \Big/ \sqrt{2} \;<\; \widetilde{D}_n(x_{n-1}) \;<\; (2E)^n\, e^{0.072/n} \Big/ \sqrt{2} \qquad (2E = 3.20991\dots), \tag{7$'$}$$

$$\frac{8\, n^{3/2}}{\pi} \left(1 - \frac{\pi^2}{40}\, \frac{1}{n^2}\right) \;<\; \widetilde{D}_n(x_1) \;<\; \frac{8\, n^{3/2}}{\pi} \left(1 - \frac{\pi^2}{48}\, \frac{1}{n^2}\right), \tag{20$'$}$$

$$(2E)^n\, e^{0.051/n} \Big/ \sqrt{2} \;<\; \widetilde{D}_n(+1) \;<\; (2E)^n\, e^{0.103/n} \Big/ \sqrt{2}, \tag{21$'$}$$

$$\sqrt{2}\, (2E)^{-n} e^{-0.103/n} \;< |\widetilde{D}_n(-1)| \;<\; \sqrt{2}\, (2E)^{-n} e^{-0.051/n}. \tag{22$'$}$$

В терминах асимптотических оценок [15] неравенства (7′), (20′) и (21′) можно представить так:

$$\widetilde{D}_n(x_1) \;\sim\; 8\, n^{3/2} \Big/ \pi \qquad (n \to \infty),$$

$$\widetilde{D}_n(1) \;\sim \widetilde{D}_n(x_{n-1}) \;\sim\; (2E)^n \Big/ \sqrt{2} \qquad (n \to \infty).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прасолов В. В. Многочлены. – М : МЦНМО, 2003. – 336 с.

2. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М. : Наука, 1983. – 384 с.

3. Чубариков В. Н. Арифметические суммы и гауссова теорема умножения, Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 2, с. 231-253.

4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

5. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 6, № 1, p. 9–24.

6. Краснов В. А. Об интегральных формулах объема гиперболических тетраэдров, Совр. математика. Фундам. направления. 2013. Т. 49, с. 89-98

7. Дунаев А. С., Шлычков В. И. Специальные функции. – Екатеринбург: УрФУ, 2015. – 1321 с.

8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Ред. М. Абрамовиц, И. Стиган – М.: Наука, 1979. – 832 с.

9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. – М. : Физматлит, 2003. – 688 с.

10. Gordon L. A stochastic approach to the gamma function // Amer. Math. Monthly. 1994. Vol. 101, № 9, p. 858-864.

11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Том 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.

12. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Бином, Лаборатория знаний, 2021. – 636 с.

13. Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. – М.: МЦНМО, 2008. - 199 с.

14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции. – М. : Физматлит, 2002. – 632 с.

15. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1978. – 375 с.

REFERENCES

1. Prasolov, V. V. 2004, *Polynomials*, Springer-Verlag, Berlin, 316 p.

2. Pashkovskij, S. 1983, *Computational applications of Chebyshev polynomials and series*, Nauka, Moscow, 384 p. (in Russian)

3. Chubarikov, V. N. 2015, "The arithmetic sum and gaussian multiplication theorem", *Chebyshevskij Sbornik*, v. 16, no. 2, pp. 231-253. (in Russian)

4. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. 1966, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1086 p.

5. Milnor, J. 1982, "Hyperbolic geometry: the first 150 years", *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 6, no. 1, pp. 9–24.

6. Krasnov, V. A. 2013, "On integral expressions for volumes of hyperbolic tetrahedra", *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, v. 49, pp. 89-98 (in Russian)

7. Dunaev, A. S. & Schlychkov, V. I. 2015, *Special Functions*, UrFU, Ekaterinburg, 1321 p. (in Russian)

8. Abramowitz, M. & Stegun I. A. (eds.) 1964, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, NBS Applied Mathematics Series 55, National Bureau of Standards, Washington, 1046 p.

9. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. & Marichev O. I. 1986, *Integrals and Series, Volume 3: More Special Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 800 p.

10. Gordon, L. 1994, "A stochastic approach to the gamma function", *Amer. Math. Monthly*, vol. 101, no. 9, pp. 858-864.

11. Berezin, I. S. & Zhidkov, N. P. 1966, *Computing Methods, Volume 1.*, Nauka, Moscow, 632 p. (in Russian).

12. Bahvalov, N. S., Zhidkov, N. P. & Kobelkov, G. M. 2021, *Numerical methods*, Binom, Knowledge Laboratory, Moscow, 636 p. (in Russian)

13. Gelfand, I. M., Lvovsky, S. M. & Toom, A. L. 2008, *Trigonometry*, MCCME, Moscow, 199 p. (in Russia)

14. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. & Marichev, O. I. 1986, *Integrals and Series, Volume 1: Elementary Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 808 p.

15. Olver, F. W. J. 1974, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York, 572 p.

Получено 3.09.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.