УДК 519.682.1

В. А. Головешкин[1] , С. Ю. Соловьев[2]

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ВЫТЕСНЕНИЯ

Рассматривается задача конструирования явной формулы для мажоранты числовой последовательности заданной рекуррентными соотношениями. Задачи такого рода возникают при оценивании погрешности рекурсивных методов вычисления некоторых функций действительного переменного. В работе предлагается специальный подход к исследованию заданных рекуррентных соотношений, на основании которого установлено, что мажоранта задается вполне конкретной формулой и относится к классу субэкспоненциальных функций.

Ключевые слова: рекуррентное соотношение, рекурсивный алгоритм, функция действительного переменного, погрешность метода, субэкспоненциальная функция.

1. Введение. В [1] предложен метод вытеснения, который для некоторых функций $\varphi(x)$, заданных на $[0.5, 1)$, позволяет конструировать рекурсивные определения аппроксимирующих функций $\widetilde{\varphi}(x)$. Численные эксперименты позволяют предположить, что предварительно полученная оценка погрешности метода нуждается в уточнении, причем естественным и единственным “резервом” для уточнения является оценка числа листьев в дереве рекурсии. В настоящей работе развивается подход, позволяющий отказаться от предварительной экспоненциальной оценки упомянутого числа листьев.

2. Метод вытеснения. Определим последовательность чисел $A_1, A_2, \ldots$ и связанную с ней последовательность непересекающихся полуинтервалов $I_2, I_3, \ldots$:

$$A_k = (2^k - 1)/2^k, \qquad I_k = [A_{k-1}, A_k) \qquad \Rightarrow \qquad [0.5, 1) = I_2 \cup I_3 \cup \ldots .$$

Понятно, что для любого $x \in [0.5, 1)$ найдется целое число $z = z(x)$, такое, что $x \in I_z$.
Если n — фиксированное целое, то полуинтервал $[0.5, 1)$ можно представить в виде двух непересекающихся областей $[0.5, A_n) = I_2 \cup \cdots \cup I_n$ и $[A_n, 1) = I_{n+1} \cup I_{n+2} \cup \cdots$. Область $[A_n, 1)$ есть окрестность 1, причем $1 - A_n = 2^{-n}$.

Метод вытеснения применим к функциям $\varphi(x)$, удовлетворяющим следующим двум требованиям. Во-первых, значение функции φ для заданного аргумента $x \in I_z$ можно выразить через значения φ в точках A_z ($A_z \in I_{z+1}$) и $\widetilde{x}$ ($\widetilde{x} \in I_{z+k}$ для некоторого $k > 0$), где

$$\widetilde{x} \;=\; \begin{cases} x/A_z^2, & \text{если } x < A_z^2, \\ x/A_z, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Во-вторых, в окрестности 1 существует нерекурсивная аппроксимирующая функция $\varphi_a(x)$, $\varphi(x) \approx \varphi_a(x)$. Первое требование порождает рекурсивную часть определения $\widetilde{\varphi}(x)$, а второе — его базовую часть. Практическое применение рекурсивных функций такого рода нуждается, в частности, в оценке числа $S(n)$ обращений к функции φ_a в ходе вычисления $\widetilde{\varphi}(x)$ для заданного x.

Использованная в [1] оценка $S(n) \leqslant 2^n$ не учитывает особенностей вычислительного процесса, в ходе которого для каждого полуинтервала I_z рекурсивно порождаются два вида задач вычисления функции φ в точках I_z. Задачи первого вида состоят в вычислении φ во внутренних точках I_z; в худшем случае $\widetilde{x} \in I_{z+1}$. Задачи второго вида состоят в вычислении значений $\varphi(A_{z-1})$ и, как нетрудно установить, $\widetilde{A}_{z-1} \in I_{2z}$. Таким образом, дерево рекурсии [2] существенно отличается от полностью сбалансированного бинарного дерева, что влияет на оценку числа $S(n)$.

[1] ИПРИМ РАН, вед. науч. сотр.; РТУ МИРЭА, проф., д.т.н., e-mail: nikshevolog@yandex.ru
[2] Факультет ВМК МГУ, проф., д.ф.-м.н., e-mail: soloviev@glossary.ru

Рассмотрим процесс вычисления $\varphi(x)$ и его некоторые характеристики. Для заданного полуинтервала I_z введем обозначения: $R(z)$ и $Q(z)$ — количество задач первого и второго видов, решаемых на I_z; $P(z)$ — количество “отложенных” задач, порожденных на $I_2, \ldots, I_{z-1}$, но решаемых на I_{z+1}, I_{z+2} и т.д. Введенные обозначения позволяют зафиксировать следующие количественные закономерности вычислительного процесса для аргумента $x \in I_2$:

$$R(2){=}1, \qquad R(2m{-}1){=}R(2m{-}2), \qquad R(2m){=}R(2m{-}1){+}Q(m), \qquad m \geqslant 2, \tag{1}$$

$$Q(2){=}0, \qquad Q(2m{-}1){=}Q(2m{-}2){+}R(2m{-}2), \qquad Q(2m){=}Q(2m{-}1){+}R(2m{-}1), \tag{2}$$

$$P(2){=}0, \qquad P(2m{-}1){=}P(2m{-}2){+}Q(2m{-}2), \qquad P(2m){=}P(2m{-}1){+}Q(2m{-}1){-}Q(m). \tag{3}$$

Заметим, что искомое количество листьев в дереве рекурсии определяется следующим образом:

$$S(1) = 1, \qquad S(n) = R(n) + Q(n) + P(n), \qquad n \geqslant 2. \tag{4}$$

3. Мажорирующая функция. В дальнейшем для значений функций целочисленных аргументов используются выражения с индексами: $S_n \equiv S(n)$, $P_n \equiv P(n)$ и т.д. При этом выражения (1)–(4) превращаются в рекуррентные соотношения для последовательностей $\{S_n\}_{n=2}^{\infty}$, $\{P_n\}_{n=2}^{\infty}$ и т.д. Построим мажоранту функции $S(n)$, предварительно упростив ее определение.

Утверждение 1. *Рекуррентные соотношения* (1)–(4), *задающие функцию* S, *можно представить в следующем эквивалентном виде*:

$$S_1{=}S_2{=}1, \quad S_{2m-1}{=}S_{2m-2}{+}2\sum_{i=1}^{m-1} S_i{-}S_{m-1}, \quad S_{2m}{=}S_{2m-1}{+}2\sum_{i=1}^{m-1} S_i, \quad m \geqslant 2. \tag{5}$$

Доказательство. Будем пополнять систему (1)–(4) следствиями из нее же самой до тех пор, пока в пополненной системе не появятся соотношения (5), которых, как нетрудно заметить, вполне достаточно для вычисления S_n, и поэтому остальные соотношения пополненной системы из рассмотрения можно исключить.

Из (1)–(4) следует:

$$R_2 = R_3 = 1, \qquad R_{2m} = R_{2m+1} = 1 + \sum_{i=2}^{m} Q_i, \tag{6}$$

$$Q_{2m-1}{=}\sum_{i=2}^{2m-2} R_i \qquad \& \qquad Q_{2m}{=}\sum_{i=2}^{2m-1} R_i \qquad \Rightarrow \qquad Q_n{=}\sum_{i=2}^{n-1} R_i, \qquad n \geqslant 3. \tag{7}$$

Суммирование выражений для R_{2m-1}, Q_{2m-1} и P_{2m-1}, а также суммирование выражений для R_{2m}, Q_{2m} и P_{2m} порождают равенства

$$S_{2m-1} = S_{2m-2} + R_{2m-2} + Q_{2m-2}, \qquad S_{2m} = S_{2m-1} + R_{2m-1} + Q_{2m-1}. \tag{8}$$

Подставляя в (8) выражения (7) для Q_{2m-2} и Q_{2m-1}, имеем

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= S_{2m-2} + \sum_{i=2}^{2m-2} R_i = S_{2m-2}{+}\sum_{i=1}^{m-1}(R_{2i}{+}R_{2i+1}){-}R_{2m-1}, \\ S_{2m} &= S_{2m-1} + \sum_{i=2}^{2m-1} R_i = S_{2m-1}{+}\sum_{i=1}^{m-1}(R_{2i}{+}R_{2i+1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Из (8) с учетом $S_2{=}1$ следует, что $S_n{=}1{+}\sum\limits_{i=2}^{n-1} Q_i + \sum\limits_{i=2}^{n-1} R_i$ для $n \geqslant 3$. Из (7) и (6) последовательно вытекают равенства: $\sum\limits_{i=2}^{n-1} R_i = Q_n$, $\quad S_n{=}1{+}\sum\limits_{i=2}^{n} Q_i$, $\quad$ и $\quad R_{2m}{=}R_{2m+1}{=}S_m$, $\quad R_{2m} + R_{2m+1} = 2S_m$.

Подстановка в (9) полученных выражений для R_{2m-1} и $R_{2i}+R_{2i+1}$ порождает равенства (5). Утверждение 1 доказано.

Введем в рассмотрение функцию $F(n)$:

$$F_1 = F_2 = 1, \qquad F_{2m-1} = F_{2m-2} + 2\sum_{i=1}^{m-1} F_i, \qquad F_{2m} = F_{2m-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} F_i, \quad m \geqslant 2. \tag{10}$$

Сравнение (5) и (10) позволяет утверждать, что $S_n \leqslant F_n \ \ \forall n \geqslant 1$, поэтому верхняя оценка для $F(n)$ одновременно является верхней оценкой для $S(n)$.

Обозначим: $Y_n = F_1 + \dots + F_n$, тогда

$$F_1{=}F_2{=}1, \quad F_{2m-1}{=}F_{2m-2}{+}2Y_{m-1}, \qquad F_{2m}{=}F_{2m-1}{+}2Y_{m-1}, \qquad m \geqslant 2,$$

откуда

$$F_1{=}F_2{=}1, \quad F_{2m-1}{=}1{+}4\sum_{i=1}^{m-2} Y_i + 2Y_{m-1}, \qquad F_{2m}{=}1{+}4\sum_{i=1}^{m-1} Y_i, \qquad m \geqslant 2.$$

Приведем первые шестнадцать значений функции $F(n)$, а также продемонстрируем закономерность, позволяющую построить искомую мажоранту:

$$\begin{array}{lllll}
F_1 &= 1, & & & \\
F_2 &= 1, & & & \\
F_3 &= 1 + 2Y_1 & = & 3 & = F_2 + 2Y_1, \\
F_4 &= 1 + 4Y_1 & = & 5 & = F_2 + 4Y_1, \\
F_5 &= 1 + 4Y_1 + 2Y_2 & = & 9 & = F_4 + 2Y_2, \\
F_6 &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 & = & 13 & = F_4 + 4Y_2, \\
F_7 &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 & = & 23 & = F_4 + 4Y_2 + 2Y_2, \\
F_8 &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 & = & 33 & = F_4 + 4Y_2 + 4Y_2, \\
F_9 &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 + 2Y_4 & = & 53 & = F_8 + 2Y_4, \\
F_{10} &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 + 4Y_4 & = & 73 & = F_8 + 4Y_4, \\
F_{11} &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 + 4Y_4 + 2Y_5 & = & 111 & = F_8 + 4Y_4 + 2Y_5, \\
F_{12} &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 + 4Y_4 + 4Y_5 & = & 149 & = F_8 + 4Y_4 + 4Y_5, \\
F_{13} &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 + 4Y_4 + 4Y_5 + 2Y_6 & = & 213 & = F_8 + 4Y_4 + 4Y_5 + 2Y_5, \\
F_{14} &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 + 4Y_4 + 4Y_5 + 4Y_6 & = & 277 & = F_8 + 4Y_4 + 4Y_5 + 4Y_5, \\
F_{15} &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 + 4Y_4 + 4Y_5 + 4Y_6 + 2Y_7 & = & 387 & = F_8 + 4Y_4 + 4Y_5 + 4Y_5 + 2Y_6, \\
F_{16} &= 1 + 4Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 + 4Y_4 + 4Y_5 + 4Y_6 + 4Y_7 & = & 497 & = F_8 + 4Y_4 + 4Y_5 + 4Y_5 + 4Y_6.
\end{array}$$

В качестве инструмента исследования функции $F(n)$ будем использовать разложения чисел X на слагаемые специального вида:

$$X = f_0F_{2n} + f_nY_n + f_{n+1}Y_{n+1} + \dots + f_{2n-1}Y_{2n-1},$$

где $F_{2n}, Y_n, \dots, Y_{2n-1}$ — набор стандартных множителей, $f_0, f_n, \dots, f_{2n-1}$ — неотрицательные числа; в общем случае f_i зависят от n. Образцом для сравнения тех или иных разложений служит разложение $F_{4n} = F_{2n} + 4\,Y_n + \dots + 4\,Y_{2n-1}$.

4. Инструментальные разложения. Разложение на слагаемые есть операция неоднозначная — одну и ту же величину можно разложить многими способами, каждый из которых определяется набором коэффициентов. Введем обозначения и сконструируем формулы коэффициентов для конкретных разложений чисел F_{8n+k}, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. В дальнейшем эти разложения именуются инструментальными.

Утверждение 2. *Если n — натуральное число, то*

$$\begin{aligned}
Y_{2n} + \dots + Y_{4n-1} &= p_0F_{2n} + p_nY_n + \dots + p_{2n-1}Y_{2n-1}, \\
Y_{4n} &= q_0F_{2n} + q_nY_n + \dots + q_{2n-1}Y_{2n-1}, \\
Y_{4n+1} &= r_0F_{2n} + r_nY_n + \dots + r_{2n-1}Y_{2n-1},
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llll}
 & & Y_{4n+2} = s_0F_{2n} + s_nY_n + \cdots + s_{2n-1}Y_{2n-1}, & \\
\text{где} \ p_0 = 2n^2{+}n, & p_i = 2(4n{-}2i{-}1)^2, & p_{2n-1} = 2n{+}2, & \\
q_0 = 2n{+}1, & q_i = 16n{-}8i{-}2, & q_{2n-1} = 7, & \\
r_0 = 2n{+}4, & r_i = 16n{-}8i{+}2, & r_{2n-1} = 13, & \\
s_0 = 2n{+}9, & s_i = 16n{-}8i{+}6, & s_{2n-1} = 21, & n \leqslant i \leqslant 2n{-}2.
\end{array}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 2 основано на свойствах функции $F(n)$, кроме того, в доказательстве используются предварительно установленные разложения из самого утверждения 2. Обозначим $h_i = 2n{-}i$ и $w_i = h_{2i}{+}h_{2i+1} = 4n{-}4i{-}1$. Имеем

$$
\begin{aligned}
Y_{2n} + \cdots + Y_{4n-1} &= \sum_{i=0}^{2n-1}\Big(Y_{2n-1} + \sum_{j=0}^{i} F_{2n+j}\Big) = 2nY_{2n-1} + \sum_{i=0}^{2n-1} h_iF_{2n+i} = \\
&= 2nY_{2n-1} + \sum_{i=0}^{n-1}(h_{2i}F_{2n+2i} + h_{2i+1}F_{2n+2i+1}) = \\
&= 2nY_{2n-1} + \sum_{i=0}^{n-1}\Big(h_{2i}(F_{2n+2i+2} - 4Y_{n+i}) + h_{2i+1}(F_{2n+2i+2} - 2Y_{n+i})\Big) = \\
&= 2nY_{2n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} w_iF_{2n+2i+2} - \sum_{i=0}^{n-1}(4h_{2i} + 2h_{2i+1})Y_{n+i} = \\
&= 2nY_{2n-1} + H - 2\sum_{i=0}^{n-1}(6n{-}6i{-}1)Y_{n+i}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{i=0}^{2n-1} w_i\left(F_{2n} + 4\sum_{j=n}^{n+i} Y_j\right) = F_{2n}\sum_{i=0}^{n-1} w_i + 4\sum_{i=0}^{n-1} w_i \sum_{j=0}^{i} Y_{n+j} = \\
&= (2n^2{+}n)F_{2n} + 4\sum_{i=0}^{n-1} Y_{n+i}\sum_{j=i}^{n-1} w_j = (2n^2{+}n)F_{2n} + 4\sum_{i=0}^{n-1}(n{-}i)(2n{-}2i{+}1)Y_{n+i}\,.
\end{aligned}
$$

Окончательно, $Y_{2n} + \cdots + Y_{4n-1} =$

$$
\begin{aligned}
&= 2nY_{2n-1} + (2n^2{+}n)F_{2n} + \sum_{i=0}^{n-1}\Big(4(n{-}i)(2n{-}2i{+}1) - 2(6n{-}6i{-}1)\Big)Y_{n+i} = \\
&= (2n^2{+}n)F_{2n} + 2\sum_{i=0}^{n-2}(2n{-}2i{-}1)^2Y_{n+i} + 2(n{+}1)Y_{2n-1} = \\
&= (2n^2{+}n)F_{2n} + 2\sum_{i=n}^{2n-2}(4n{-}2i{-}1)^2Y_{n+i} + 2(n{+}1)Y_{2n-1}\,,
\end{aligned}
$$

* * *

$$
Y_{4n} = Y_{2n} + \sum_{i=2n+1}^{4n} F_i = Y_{2n} + \sum_{i=1}^{n}(F_{2n+2i-1}{+}F_{2n+2i}) = Y_{2n}{+}2\sum_{i=1}^{n} F_{2n+2i}{-}2\sum_{i=1}^{n} Y_{n+i-1}\,,
$$

$$
\sum_{i=1}^{n} F_{2n+2i} = \sum_{i=1}^{n}\Big(F_{2n}{+}4\sum_{j=0}^{i-1} Y_{n+j}\Big) = nF_{2n}{+}4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} Y_{n+j} = nF_{2n}{+}4\sum_{i=0}^{n-1}(n{-}i)Y_{n+j}\,,
$$

$$
Y_{4n} = Y_{2n}{+}2nF_{2n}{+}8\sum_{i=0}^{n-1}(n{-}i)Y_{n+i}{-}2\sum_{i=0}^{n-1} Y_{n+i} = (2n{+}1)F_{2n} + \sum_{i=0}^{n-1}(8n{-}8i{-}2)Y_{n+i} + Y_{2n-1},
$$

* * *

$$Y_{4n+1} = Y_{4n} + F_{4n}{+}2Y_{2n} = Y_{4n} + F_{2n}{+}4\sum_{i=n}^{2n-2} Y_i{+}2(Y_{2n-1}{+}F_{2n}) = Y_{4n} + 3F_{2n}+$$
$$+\,4\sum_{i=n}^{2n-2} Y_i{+}6Y_{2n-1} = (2n{+}1{+}3)F_{2n} + \sum_{i=n}^{2n-2}(16n{-}8i{-}2{+}4)Y_i + (7{+}6)\,Y_{2n-1},$$

* * *

$$Y_{4n+2} = Y_{4n+1}{+}F_{4n+2} = Y_{4n+1}{+}F_{2n}{+}4\sum_{i=n}^{2n} Y_i = Y_{4n+1}{+}F_{2n}{+}4\sum_{i=n}^{2n-1} Y_i{+}4(Y_{2n-1}{+}F_{2n})$$
$$= Y_{4n+1} + 5F_{2n} + 4\sum_{i=n}^{2n-2} Y_i{+}8Y_{2n-1} =$$
$$= (2n{+}4{+}5)F_{2n} + \sum_{i=n}^{2n-2}(16n{-}8i{+}2{+}4)Y_i + (13{+}8)\,Y_{2n-1}.$$

Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Если* $n = 1$, *то* $Y_{4+3} = 20F_2 + 35Y_1$. *Если* $n > 1$, *то* $Y_{4n+3} = t_0F_{2n} + t_nY_n + {+}\cdots{+}t_{2n-1}Y_{2n-1}$, *где* $t_0 = 2n{+}18$, $t_n = 8n{+}14$, $t_j = 16n{-}8j{+}10$, $t_{2n-1} = 31$, $n < j \leqslant 2n{-}2$.

Первая часть утверждения проверяется численно. Пусть $n > 1$, тогда

$$Y_{4n+3} = Y_{4n+2} + (F_{4n}{+}4Y_{2n} + 2Y_{2n+1}) = Y_{4n+2}{+}F_{4n}{+}4(Y_{2n-1}{+}F_{2n}){+}2(Y_{2n-1}{+}F_{2n}{+}F_{2n+1}) =$$
$$= Y_{4n+2}{+}F_{4n}{+}6F_{2n}{+}2(F_{2n}{+}2Y_n){+}6Y_{2n-1} = Y_{4n+2}{+}F_{4n}{+}8F_{2n}{+}4Y_n{+}6Y_{2n-1} =$$
$$= Y_{4n+2}{+}(F_{2n}{+}4Y_n{+}\cdots{+}4Y_{2n-1}){+}8F_{2n}{+}4Y_n{+}6Y_{2n-1} = (2n{+}9{+}1{+}8)F_{2n}+$$
$$+\,(8n{+}6{+}4{+}4)Y_n + \sum_{i=n+1}^{2n-2}(16n{-}8i{+}6{+}4)Y_i + (21{+}4{+}6)Y_{2n-1}.$$

Утверждение 3 доказано.

Следствие. Если n — натуральное число, то

$$F_8 = 13F_2 + 20Y_1,\qquad F_{8n} = a_0F_{2n} + a_nY_n + \cdots + a_{2n-1}Y_{2n-1},\qquad n \geqslant 2, \tag{11}$$
$$F_{8+2} = 25F_2 + 48Y_1,\qquad F_{8n+2} = b_0F_{2n} + b_nY_n + \cdots + b_{2n-1}Y_{2n-1},\qquad n \geqslant 2, \tag{12}$$
$$F_{8+4} = 49F_2 + 100Y_1,\qquad F_{8n+4} = c_0F_{2n} + c_nY_n + \cdots + c_{2n-1}Y_{2n-1},\qquad n \geqslant 2, \tag{13}$$
$$F_{8+6} = 93F_2 + 184Y_1,\qquad F_{8n+6} = d_0F_{2n} + d_nY_n + \cdots + d_{2n-1}Y_{2n-1},\qquad n \geqslant 2, \tag{14}$$
$$F_{8+7} = 133F_2 + 254Y_1,\qquad F_{8n+7} = e_0F_{2n} + e_nY_n + \cdots + e_{2n-1}Y_{2n-1},\qquad n \geqslant 2, \tag{15}$$

где
$$\begin{array}{llll}
a_0 = 8n^2{+}4n{+}1, & a_i = 8(4n{-}2i{-}1)^2{+}4, & a_{2n-1} = 8n{+}12, & n \leqslant i \leqslant 2n{-}2,\\
b_0 = 8n^2{+}12n{+}5, & b_i = 32(2n{-}i)^2{+}4, & b_{2n-1} = 8n{+}40, & n \leqslant i \leqslant 2n{-}2,\\
c_0 = 8n^2{+}20n{+}21, & c_i = 8(4n{-}2i{+}1)^2{+}4, & c_{2n-1} = 8n{+}92, & n \leqslant i \leqslant 2n{-}2,\\
d_0 = 8n^2{+}28n{+}57, & d_i = 32(2n{-}i{+}1)^2{+}4, & d_{2n-1} = 8n{+}176, & n \leqslant i \leqslant 2n{-}2,\\
e_0 = 8n^2{+}32n{+}93, & & & \\
e_n = 16(2n^2{+}5n{+}4), & e_j = 2(8n{-}4j{+}5)^2{+}6, & e_{2n-1} = 8n{+}238, & n < j \leqslant 2n{-}2.
\end{array}$$

Для случая $n = 1$ разложения (11)—(15) проверяются непосредственно. Рассмотрим случай $n > 1$:

$$F_{8n} = F_{4n} + 4(Y_{2n}{+}\cdots{+}Y_{4n-1}) = F_{2n} + 4Y_n{+}\cdots{+}4Y_{2n-1} + 4(p_0F_{2n} + p_nY_n+$$
$$+\cdots{+}p_{2n-1}Y_{2n-1}) = (1{+}4p_0)F_{2n} + (4{+}4p_n)Y_n{+}\cdots{+}(4{+}4p_{2n-1})Y_{2n-1}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
F_{8n+2} &= F_{8n} + 4Y_{4n} = a_0F_{2n}+a_nY_n+\cdots+a_{2n-1}Y_{2n-1}+4(q_0F_{2n}+q_nY_n+\cdots+q_{2n-1}Y_{2n-1})= \\
&\qquad = (a_0+4q_0)F_{2n}+(a_n+4q_n)Y_n+\cdots+(a_{2n-1}+4q_{2n-1})Y_{2n-1}, \\
F_{8n+4} &= F_{8n+2} + 4Y_{4n+1} = (b_0+4r_0)F_{2n}+(b_n+4r_n)Y_n+\cdots+(b_{2n-1}+4r_{2n-1})Y_{2n-1}, \\
F_{8n+6} &= F_{8n+4} + 4Y_{4n+2} = (c_0+4s_0)F_{2n}+(c_n+4s_n)Y_n+\cdots+(c_{2n-1}+4s_{2n-1})Y_{2n-1}, \\
F_{8n+7} &= F_{8n+4} + 2Y_{4n+3} = (d_0+2t_0)F_{2n}+(d_n+2t_n)Y_n+\cdots+(d_{2n-1}+2t_{2n-1})Y_{2n-1}.
\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Поскольку $F_{2n+1} = (F_{2n} + F_{2n+2})/2$, то

$$F_{8+1} = 19F_2 + 34Y_1, \qquad F_{2n+1} = \frac{a_0+b_0}{2}\,F_{2n} + \sum_{i=n}^{2n-1} \frac{a_i+b_i}{2}\,Y_i, \qquad n \geqslant 2, \tag{16}$$

$$F_{8+3} = 37F_2 + 74Y_1, \qquad F_{2n+3} = \frac{b_0+c_0}{2}\,F_{2n} + \sum_{i=n}^{2n-1} \frac{b_i+c_i}{2}\,Y_i, \qquad n \geqslant 2, \tag{17}$$

$$F_{8+5} = 71F_2 + 92Y_1, \qquad F_{2n+5} = \frac{c_0+d_0}{2}\,F_{2n} + \sum_{i=n}^{2n-1} \frac{c_i+d_i}{2}\,Y_i, \qquad n \geqslant 2. \tag{18}$$

5. Свойства инструментальных разложений. Рассмотрим выражения весьма общего вида: $f_0 + f_1Y_1 + f_2Y_2 + \cdots + f_kY_k$, где f_i — числовые коэффициенты.

Утверждение 4. *Если* $f_0 + \cdots + f_k = 0$ *и для некоторого* m, $0<m<k$, *выполняются условия* $f_0>0, \ldots, f_m>0$ *и* $f_{m+1} \leqslant 0, \ldots, f_k \leqslant 0$, *то* $f_0 + f_1Y_1 + \cdots + f_kY_k < 0$.

В самом деле,

$$f_0 + f_1Y_1 + \cdots + f_kY_k = f_0 + \sum_{i=1}^{m} f_iY_i + \sum_{i=m+1}^{k} f_iY_i \leqslant$$

$$\leqslant Y_m \sum_{i=1}^{m} f_i + Y_{m+1} \sum_{i=m+1}^{k} f_i = (Y_m - Y_{m+1}) \sum_{i=1}^{m} f_i.$$

Утверждение 4 доказано.

Замечание. В дальнейших рассуждениях существенно используются равенства $F_{2n} = 1 + 4Y_1 + \cdots + 4Y_{n-1}$.

Пусть $f_0F_{2n} + f_nY_n + \cdots + f_{2n-1}Y_{2n-1}$ — разложение некоторого числа Z. Свяжем с этим разложением его числовую характеристику

$$\rho(n|f_0, f_n, \ldots, f_{2n-1}) = \frac{(4n-3)f_0 + f_n + \cdots + f_{2n-1}}{8n-3}.$$

В приведенной формуле знаменатель есть сумма коэффициентов представления числа F_{4n} в виде $1 + 4Y_1 + \cdots + 4Y_{2n-1}$, а числитель — сумма коэффициентов представления числа Z в виде $f_0 + 4f_0Y_1 + \cdots + 4f_{n-1}Y_{n-1} + f_nY_n + \cdots + f_{2n-1}Y_{2n-1}$.

Утверждение 5. *Пусть* $f_0, f_n, \ldots, f_{2n-1}$ *— коэффициенты некоторого разложения,* $n > 1$, *и* $\rho = \rho(n|f_0, f_n, \ldots, f_{2n-1})$. *Если имеют место неравенства*

$$f_0 > \rho, \tag{19}$$

$$4\rho > f_{2n-1}, \tag{20}$$

$$4f_0 \geqslant f_n \geqslant \cdots \geqslant f_{2n-2}, \tag{21}$$

то $f_0F_{2n} + f_nY_n + \cdots + f_{2n-1}Y_{2n-1} < \rho F_{4n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим выражение $f_0F_{2n} + f_nY_n + \dots + f_{2n-1}Y_{2n-1} - \rho F_{4n} \equiv$ $\equiv f_0{+}4f_0Y_1{+}\dots{+}4f_{n-1}Y_{n-1}{+}f_nY_n{+}\dots{+}f_{2n-1}Y_{2n-1}{-}\rho\,(1{+}4Y_1{+}\dots{+}4Y_{2n-1})$. Положим $f'_0 = f_0{-}\rho$, $f'_i = 4f'_0 = 4f_0{-}4\rho\ (i{=}1,\dots,n{-}1)$, $f'_j = f_j{-}4\rho\ (j{=}n,\dots,2n{-}1)$. По построению $f'_0{+}f'_1{+}\dots{+}f'_{2n-1} =$ $= 0$.

Из условия (19) следует, что $f'_0 > 0$ и $f'_1 = f'_2 = \dots = f'_{n-1} > 0$.

Из условия (20) следует, что $f'_{2n-1} < 0$.

Из условия (21) следует, что $f'_{n-1} \geqslant f'_n \geqslant \dots \geqslant f'_{2n-2}$.

Поскольку $f'_{n-1} > 0$, то для некоторого m, $n{\leqslant}m{\leqslant}2n{-}2$, имеют место неравенства $f'_n{>}0, \dots,$ $f'_m > 0$ и $f'_{m+1}{\leqslant}0, \dots, f'_{2n-2}{\leqslant}0$. Таким образом, последовательность $f'_0, \dots, f'_{2n-1}$ удовлетворяет всем условиям утверждения 4, а значит

$$f'_0 + \sum_{i=1}^{2n-1} f'_iY_i < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_0 + 4f_0\sum_{i=1}^{n-1} Y_i + \sum_{i=n}^{2n-1} f_iY_i < \rho(1{+}4Y_1{+}\dots{+}4Y_{2n-1}) = \rho F_{4n}.$$

Утверждение 5 доказано.

Формулы (11)–(18) содержат выражения для коэффициентов конкретных разложений величин F_{8n+k}, где $k{\in}\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Это обстоятельство позволяет, во-первых, связать с каждым числом F_{8n+k} характеристику ρ_k: $\rho_0 = \rho(n|a_0, a_n, \dots, a_{2n-1})$, $\rho_2 = \rho(n|b_0, b_n, \dots, b_{2n-1})$ и т.д., и во-вторых, вывести формулы для этих характеристик:

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= (128n^3 - 24n^2 + 4n - 9)/(3(8n{-}3)), & \rho_4 &= (128n^3{+}264n^2 + 196n{-}141)/(3(8n{-}3)),\\
\rho_1 &= (128n^3 + 48n^2 + 4n{-}21)/(3(8n{-}3)), & \rho_5 &= (128n^3{+}336n^2 + 436n{-}261)/(3(8n{-}3)),\\
\rho_2 &= (128n^3{+}120n^2 + 4n{-}33)/(3(8n{-}3)), & \rho_6 &= (128n^3{+}408n^2 + 676n{-}381)/(3(8n{-}3)),\\
\rho_3 &= (128n^3{+}192n^2{+}100n{-}87)/(3(8n{-}3)), & \rho_7 &= (128n^3{+}480n^2{+}1156n{-}603)/(3(8n{-}3)).
\end{aligned}$$

У т в е р ж д е н и е 6. *Для любого k из $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ и любого натурального числа n выполняются неравенства $F_{8n+k} \leqslant \rho_kF_{4n}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для случая $n = 1$ неравенства проверяются численно. Пусть $n > 1$. Покажем, что набор коэффициентов $a_0, a_n, \dots, a_{2n-1}$ инструментального разложения (11) удовлетворяет условиям утверждения 5. В самом деле:

- ▷ условие (19) эквивалентно неравенству $8n^2{+}4n{+}1 > \rho_0$, которое, в свою очередь, эквивалентно очевидному неравенству $4(n{-}1)^3{+}15(n{-}1)^2{+}17(n{-}1){+}6 > 0$;
- ▷ условие (20) эквивалентно неравенству $4\rho_0 > 8n{+}12$, которое, в свою очередь, эквивалентно очевидному неравенству $64(n{-}1)^3{+}156(n{-}1)^2{+}95(n{-}1){+}12 > 0$;
- ▷ условие (21) эквивалентно неравенству $4(8n^2{+}4n{+}1) \geqslant 8(2n{-}1)^2 + 4$, которое эквивалентно очевидному неравенству $6\,n \geqslant 1$.

Следовательно, $F_{8n} \leqslant \rho_0F_{4n}$. Аналогично доказывается, что остальные инструментальные разложения (12)–(18) удовлетворяют условиям (19)–(21) утверждения 5, а значит $F_{8n+k} \leqslant \rho_kF_{4n}$. Утверждение 6 доказано.

6. Предварительные оценки. Характеристики ρ_k представляют собой аналитически заданные функции, зависящие от аргумента n. Стандартное исследование [3] функций позволяет сформулировать шесть важных свойств характеристик $\rho_k = \rho_k(n)$.

С в о й с т в о 1. Для любого $n \geqslant 1$ имеют место неравенства
$0 < \rho_0(n) < \rho_1(n) < \rho_2(n) < \rho_3(n) < \rho_4(n) < \rho_5(n) < \rho_6(n) < \rho_7(n)$.
Введем в рассмотрение числа $\lambda_0{=}16/3$ и $\lambda_1{=}20281/2^{13}$, а также функции $\beta_4(n)$ и $\beta_7(n)$:

$$\rho_4(n) = n^2\,\beta_4(n) = n^2\left(\frac{16}{3} + \frac{13}{n} + \frac{313}{24}\,\frac{1}{n^2} - \frac{63}{8(8n{-}3)n^2}\right),$$
$$\rho_7(n) = n^2\,\beta_7(n) = n^2\left(\frac{16}{3} + \frac{22}{n} + \frac{677}{12}\,\frac{1}{n^2} - \frac{127}{4(8n{-}3)n^2}\right).$$

Свойство 2. Если $n \geqslant 1$, то $\beta_4(n)$ и $\beta_7(n)$ — монотонно убывающие функции.
Свойство 3. Если $n \geqslant 64$, то $\beta_4(n) \leqslant \lambda_0\,(1+\lambda_1/n)$.
Свойство 4. Имеет место равенство $\rho_4(1)\,F_4 = 149$.
Свойство 5. Для любого $n \geqslant 32$ выполняется неравенство

$$\beta_7(n/8) \ < \ \beta_4(n/8)\ \beta_4(n/4)\ \beta_4(n/2)\ \beta_4(n)\,/\,256. \tag{22}$$

Доказательство свойства 5 сводится к серии очевидных эквивалентных преобразований неравенства (22) к виду $\widetilde{P}_{11}(n{-}32) > 0$, где $\widetilde{P}_{11}(x)$ — полином одиннадцатой степени со всеми положительными коэффициентами.

Свойство 6. Если $n_1,\ldots,n_k$ — набор положительных чисел, удовлетворяющих условию $n_1+\cdots+n_k < n$, то $\prod\limits_{i=1}^{k}\rho_4(n/n_i) \ < \ n^{2k}\,\lambda_0^k\,e^{\lambda_1}\left(\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\right)^2$.

В самом деле: $\prod\limits_{i=1}^{k}\rho_4(n/n_i) \leqslant \left(\prod\limits_{i=1}^{k}(n/n_i)^2\,\lambda_0^k\right)\ \prod\limits_{i=1}^{k}(1{+}\lambda_1/(n/n_i)) =$

$$= \ B\exp\left(\sum_{i=1}^{k}\ln(1{+}\lambda_1 n_i/n)\right) \ < \ B\exp\left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_1 n_i/n)\right) \ < \ Be^{\lambda_1}, \ \text{ где } B = n^{2k}\,\lambda_0^k\,\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\right)^2.$$

Для справки: $11.89 < e^{\lambda_1} < 11.8902$.

7. Конструирование верхней оценки. Зафиксируем некоторое натуральное число $n \geqslant 64$. Двоичная запись (с обратной нумерацией) числа n имеет вид $\overline{1\delta_l\delta_{l-1}\ldots\delta_1}$, здесь $\delta_i \in \{0,1\}$, надчеркивание используется для обозначения двоичной записи, а $l = [\log_2(n)]$, $l \geqslant 6$. По правилам двоичной арифметики

$$\begin{aligned}
n \ &= \ \overline{1\delta_l\ldots\delta_4\delta_3\delta_2\delta_1} \ = \ \overline{1\delta_l\ldots\delta_4 000} \ + \ \overline{\delta_3\delta_2\delta_1} \ = \ 8\times\overline{1\delta_l\ldots\delta_4} \ + \ \overline{\delta_3\delta_2\delta_1},\\
4\times\overline{1\delta_l\ldots\delta_5\delta_4} \ &= \ \overline{1\delta_l\ldots\delta_5\delta_4 00} \ = \ \overline{1\delta_l\ldots\delta_5 000} \ + \ \overline{\delta_4 00} \ = \ 8\times\overline{1\delta_l\ldots\delta_5} \ + \ \overline{\delta_4 00},\ \cdots,\\
4\times\overline{1\delta_l} \ &= \ \overline{1\delta_l 00} \ = \ \overline{1000} \ + \ \overline{\delta_l 00} \ = \ 8\times 1 \ + \ \overline{\delta_l 00}.
\end{aligned}$$

Как следует из утверждения 5 приведенные соотношения порождают неравенства:

$$\begin{aligned}
F_n \ = \ F(\overline{1\delta_l\ldots\delta_4\delta_3\delta_2\delta_1}) \ &\leqslant \ \rho_{\overline{\delta_3\delta_2\delta_1}}(\overline{1\delta_l\ldots\delta_4})\times F(\overline{1\delta_l\ldots\delta_4 00}),\\
F(\overline{1\delta_l\ldots\delta_5\delta_4 00}) \ &\leqslant \ \rho_{\overline{\delta_4 00}}(\overline{1\delta_l\ldots\delta_5})\times F(\overline{1\delta_l\ldots\delta_5 00}),\\
F(\overline{1\delta_l\ldots\delta_6\delta_5 00}) \ &\leqslant \ \rho_{\overline{\delta_5 00}}(\overline{1\delta_l\ldots\delta_6})\times F(\overline{1\delta_l\ldots\delta_6 00}),\ \cdots,\\
F(\overline{1\delta_l 00}) \ &\leqslant \ \rho_{\overline{\delta_l 00}}(1)\times F(\overline{100}) \ = \ \rho_{\overline{\delta_l 00}}(1)\times F_4.
\end{aligned}$$

Последовательное применение свойств 4, 5 и 6 позволяет получить искомую оценку:

$$\begin{aligned}
F_n \ &\leqslant \ \rho_{\overline{\delta_3\delta_2\delta_l}}(\overline{1\delta_l\ldots\delta_4})\left(\prod_{i=4}^{l-1}\rho_{\overline{\delta_i 00}}(\overline{1\ldots\delta_{i+1}})\right)\rho_{\overline{\delta_l 00}}(1)F_4 \ \leqslant\\
&\leqslant \ \rho_7(n/8)\prod_{i=4}^{l-1}\rho_4(n/2^i)\ \rho_4(1)F_4 \ = \ 149\ \left(\frac{n}{8}\right)^2\beta_7(n/8)\prod_{i=4}^{l-1}\rho_4(n/2^i) \ \leqslant\\
&\leqslant \ 149\ \left(\frac{n}{8}\right)^2\frac{1}{256}\prod_{i=0}^{3}\beta_4(n/2^i)\prod_{i=4}^{l-1}\rho_4(n/2^i) \ \leqslant \ \frac{149}{256}\,\frac{4^2\,2^2}{n^6}\prod_{i=0}^{l-1}\rho_4(n/2^i) \ \leqslant\\
&\leqslant \ \frac{149}{4\,n^6}\,\frac{n^{2l}}{(2^{0+1+\cdots+l-1})^2}\,\lambda_0^l\,e^{\lambda_1} \ = \ \frac{149\,e^{\lambda_1}}{4\,n^6}\,\left(\frac{\lambda_0\,n^2}{2^{l-1}}\right)^l \ \leqslant \ \frac{149\,e^{\lambda_1}}{4\,n^6}\,\left(\frac{\lambda_0\,n^2}{2^{\log_2(n)-2}}\right)^l =\\
&= \ \frac{149\,e^{\lambda_1}}{4\,n^6}\,\left(\frac{2^6}{3}\,n\right)^l \ \leqslant \ \frac{149\,e^{\lambda_1}}{4\,n^6}\,\frac{n^6}{n^{\log_2(3)}}\,n^{\log_2(n)} \ \leqslant \ 443\,\frac{n^{\log_2(n)}}{n^{1.58}}\,.
\end{aligned} \tag{23}$$

Заметим, что в части применения свойства 6 используется набор из l чисел 2^{l-1}, 2^{l-2}, …, 2^0: $2^{l-1}+\cdots+2^0=\overline{0\delta'_l\ldots\delta'_1}$, $\delta'_l=\cdots=\delta'_1=1$, и $\overline{0\delta'_l\ldots\delta'_1}<\overline{1\delta_l\ldots\delta_1}=n$.

Оценка (23) получена в предположении $n\geqslant 64$, однако серия огрублений, сделанных при выводе этой оценки, позволяет предположить, что неравенство (23) может выполняться и для некоторых $n<64$. Действительно, численная проверка для всех натуральных n из диапазона $[1,63]$ показала, что оценка (23) справедлива для $n\geqslant 2$.

Итак, по результатам аналитического и численного исследований установлена следующая оценка:

$$S_n \leqslant F_n < 443\,\frac{n^{\log_2(n)}}{n^{1.58}} \qquad \text{для} \quad n\geqslant 2.$$

8. Заключение. Полученная мажорирующая функция относится к классу субэкспоненциальных функций [4], занимающих промежуточное положение между полиномиальными и экспоненциальными функциями. Это обстоятельство позволяет скорректировать в сторону уменьшения оценку погрешности метода вытеснения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьев С.Ю. Алгоритм вычисления логарифмов методом вытеснения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2013. № 2. С. 38–43. (Soloviev S. Yu. An algorithm for calculating logarithms through displacement // Moscow Univ. Comput. Math. and Cybern. 2013. **37**. N 2. P. 83–88.)
2. Быкова В.В. Математические методы анализа рекурсивных алгоритмов // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Математика и физика. 2008. **1.** № 3. С. 236–246.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: Наука; Физматлит, 1998.
4. Головешкин В.А., Ульянов М.В. Метод классификации вычислительных алгоритмов по сложности на основе угловой меры асимптотического роста функций // Вычислительные технологии. 2006. **11.** № 1. С. 52–62.

Поступила в редакцию 20.09.18
После доработки 07.11.18
Принята к публикации 07.11.18