Информационные процессы, Том 11, № 1, 2011, стр. 86–89.

Свойства формальных контекстов

Д.Е. Стельмашенко

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 25.12.2010

Аннотация—В статье исследуются изменения формальных понятий, вызванные преобразованиями формальных контекстов. Основное внимание уделено фрагментации и дефрагментации формальных контекстов на/из составных частей, заданных множествами признаков.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим с формальной точки зрения вопрос об изменении понятийной картины мира при привлечении/выпадении отдельных групп признаков, задействованных в описании понятий. Следуя [1], будем полагать, что формальные понятия существуют в связи с, так называемыми, формальными контекстами.

2. ФОРМАЛЬНЫЕ КОНТЕКСТЫ

Задействуем букву N для обозначения конечного множества некоторых элементов, именуемых признаками. В примерах для конкретных значений признаков будем использовать натуральные числа.

Подмножества признаков будем называть объектами. Для обозначения объектов будем использовать строчные буквы латинского алфавита: a, b, c и т.д. $a \subseteq N$, $b \subseteq N$ и т.д.

Подмножества объектов будем называть классами. Для обозначения классов будем использовать заглавные буквы латинского алфавита: A, B, C и т.д.

Если A – класс, то будем обозначать

$$Con(A) = \bigcap_{a \in A} a$$

В [2] и во всех других учебниках логики доказывается

Закон обратного отношения. Если A и B – два класса и $A \subseteq B$, то $Con(B) \subseteq Con(A)$.

Определение. Пусть D – фиксированное множество объектов, заданных признаками из N. Пару $< D, N >$ будем называть формальным контекстом или просто контекстом.[1]

Пример 1. $D = \{\{1, 2, 11, 12\},\ \{1, 3, 11, 13\},\ \{4, 5, 11, 14\}\}$, $\quad N = \{1, 2, 3, 4, 5,\ 11, 12, 13, 14\}$.

3. ФОРМАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. Формальным понятием в контексте $< D, N >$ называется такой класс объектов A, $A \subseteq D$, для которого справедливо равенство

$$A = \{\ d \in D \mid Con(A)\ \subseteq d\ \} \tag{1}$$

[1] Частным случаем задания множества D является таблица <объект, свойство>.

Заметим, что равенство (1) эквивалентно равенству (2):

$$A = \{\ d \mid Con(A)\ \subseteq d\ \in\ D\ \} \tag{2}$$

Если множество признаков N конечно и контекст $< D, N >$ задан, то алгоритм проверки класса A на соответствие определению формального понятия состоит из трех шагов:
Шаг 1. По известному множеству A построить $c = Con(A)$.
Шаг 2. По известному множеству c построить $T = \{d \in D \mid c \subseteq d\}$.
Шаг 3. Если $A = T$, то A есть формальное понятие, иначе A не является формальным понятием.

Пример 2. (Множества D и N заимствованы из примера 1.)
Проверим класс объектов $B = \{\{1, 2, 11, 12\},\ \{1, 3, 11, 13\}\}$ на соответствие определению формального понятия:
Шаг 1. $c = Con(B) = \{1, 11\}$.
Шаг 2. $T = \{d \in D \mid c \subseteq d\} = \{\{1, 2, 11, 12\},\ \{1, 3, 11, 13\}\}$.
Шаг 3. $T \equiv B$, следовательно, B является формальным понятием.

Для фиксированного контекста $< D, N >$ понятие A можно задавать:
– явным перечислением объектов, составляющих объем понятия; и/или
– посредством формального содержания $Con(A)$, и тогда A вычисляется по формуле (1).

Предположим, что множество признаков N задано в виде объединения двух подмножеств N_1 и N_2. $N = N_1 \cup N_2$. Соответственно дополним соглашения относительно объектов и классов.

Любой объект, скажем a, можно однозначно представить в виде объединения двух подмножеств $a_1 = a \cap N_1$ и $a_2 = a \cap N_2$; $a = a_1 \cup a_2$. Для удобства обозначений, вместо $a = a_1 \cup a_2$ будем писать $a = a_1 + a_2$, понимая, что $a_1 = a \cap N_1$ и $a_2 = a \cap N_2$.

Любой класс, скажем А, однозначно порождает классы

$$A_1 = \{a_1 \mid a_1 + a_2 \in A\} \quad \text{и} \quad A_2 = \{a_2 \mid a_1 + a_2 \in A\}.$$

Пример 3. (Множества D, N и B заимствованы из примеров 1 и 2.)
Положим $N_1 = \{\ 1, 2, 3, 4, 5\ \}$, и $N_2 = \{11, 12, 13, 14\}$.
Тогда $D_1 = \{\{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{4, 5\}\}$ и $D_2 = \{\{11, 12\},\ \{11, 13\},\ \{11, 14\}\}$.
$B_1 = \{\{1, 2\},\ \{1, 3\}\}$; $Con(B_1) = \{1\}$.
Нетрудно заметить, что класс B_1 не является формальным понятием в контексте $< D_1, N_1 >$.

4. ФРАГМЕНТАЦИЯ ФОРМАЛЬНЫХ КОНТЕКСТОВ

Рассмотрим вопрос о том, что происходит с формальными понятиями при переходе от заданного формального контекста к его части.

Утверждение 1. *Если A – формальное понятие в контексте $< D, N_1 \cup N_2 >$, то в контексте $< D_1, N_1 >$ существует понятие B_1, для которого $Con(B_1) = Con(A_1)$.*

Доказательство. Обозначим $c_1 = Con(A_1)$, определим $B_1 = \{\ b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in D_1\ \}$, и покажем, что
1) $c_1 \subseteq Con(B_1)$,
2) $c_1 \supseteq Con(B_1)$, то есть $Con(A_1) = Con(B_1)$,
3) B_1 – формальное понятие в контексте $< D_1, N_1 >$.

Первое усматривается непосредственно из определения B_1.

Второе следует из того факта, что
$B_1 = \{\ b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in A_1\ \} \cup \{\ b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in D_1 \setminus A_1\ \} = A_1 \cup \{\ b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in D_1 \setminus A_1\ \}$.
Что означает $A_1 \subseteq B_1$, и по закону обратного отношения $Con(A_1) \supseteq Con(B_1)$.

Третье следует из доказанного равенства $c_1 = Con(B_1)$:

$$B_1 \;=\; \{\ b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in D_1\ \} \;=\; \{\ b_1 \mid Con(B_1) \subseteq b_1 \in D_1\ \}.$$

Утверждение 1 доказано.

Следствие. $A_1 \subseteq B_1$.

Пример 4. (Множества D, D_1, D_2, N, N_1 и N_2 заимствованы из примеров 1 и 3.) Рассмотрим формальное понятие $A = \{\ \{1,2,11,12\}, \{1,3,11,13\}\ \}$ для контекста $< D, N >$:

$$Con(A) \;=\; \{1,11\}, \quad A_1 = \{\{1,2\},\{1,3\}\}, \quad A_2 = \{\{11,12\},\{11,13\}\}.$$

В соответствии с утверждением 1 в контекстах $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$, должны существовать формальные понятия B_1 и B_2, для которых $Con(B_1) = \{1\}$ и $Con(B_2) = \{11\}$. Действительно, такие формальные понятия существуют

$$B_1 = \{\{1,2\},\{1,3\}\}, \quad B_2 = \{\{11,12\},\{11,13\},\{11,14\}\}.$$

Причем $A_1 = B_1$, но $A_2 \neq B_2$.

5. ДЕФРАГМЕНТАЦИЯ ФОРМАЛЬНЫХ КОНТЕКСТОВ

Рассмотрим вопрос о том, что происходит с формальными понятиями при конструировании единого формального контекста из заданных частей.

Утверждение 2.
Пусть (а) $< D, N_1 \cup N_2 >$ *– формальный контекст;*
(б) B_1 *– формальное понятие в контексте* $< D_1, N_1 >$*, где* $D_1 = \{d_1 \mid d_1 + d_2 \in D\}$*;*
(в) B_2 *– формальное понятие в контексте* $< D_2, N_2 >$*, где* $D_2 = \{d_2 \mid d_1 + d_2 \in D\}$*;*
Тогда класс $B \;=\; \{b_1 + b_2 \in D \mid b_1 \in B_1 \;\text{ и }\; b_2 \in B_2\}$
является формальным понятием в контексте $< D, N_1 \cup N_2 >$.

Доказательство. Покажем, что

$$B \;\subseteq \{b \in D \mid Con(B) \subseteq b\}, \tag{3}$$

$$Con(B_1) + Con(B_2) \subseteq Con(B), \tag{4}$$

$$B \;\supseteq \{b \in D \mid Con(B) \subseteq b\} \tag{5}$$

Соотношение (3) выполняется для любого класса объектов из D, в том числе и для B.

Докажем соотношение (4), которое существенно используется при доказательстве (5). Определим вспомогательный класс $A = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in B_1 \;\text{ и }\; a_2 \in B_2\}$.
Во-первых, $B \subseteq A$, и по закону обратного отношения $Con(A) \subseteq Con(B)$.
Во-вторых,

$$Con(A) \;=\; \bigcap_{a_1 \in B_1} \bigcap_{a_2 \in B_2} (a_1 + a_2) \;=\; \bigcap_{a_1 \in B_1} a_1 + \bigcap_{a_2 \in B_2} a_2 \;=\; Con(B_1) + Con(B_2)$$

Окончательно:

$$Con(B_1) + Con(B_2) \;=\; Con(A) \;\subseteq\; Con(B).$$

Соотношение (4) доказано.

Докажем (5). Предположим обратное: существует некоторый объект c такой, что

$$c \in D, \quad c \notin B \quad \text{и} \quad Con(B) \subseteq c.$$

Из $Con(B) \subseteq c$ и (4) следует, что $Con(B_1) + Con(B_2) \subseteq c$.
В результате формальных преобразований

$$\begin{aligned} N_1 \cap (Con(B_1) + Con(B_2)) &\subseteq c \cap N_1, \\ N_1 \cap Con(B_1) + N_1 \cap Con(B_2) &\subseteq c \cap N_1, \\ Con(B_1) + N_1 \cap Con(B_2) &\subseteq c_1, \\ Con(B_1) &\subseteq c_1. \end{aligned}$$

По предположению $c \in D$, поэтому $c_1 \in D_1$.
Следовательно $Con(B_1) \subseteq c_1 \in D_1$.
А поскольку B_1 - формальное понятие, то $c_1 \in B_1$.
Аналогично $c_2 \in B_2$.
Окончательно: $c = c_1 + c_2 \in B$, что противоречит сделанному предположению.
Соотношение (5) доказано.

Из (3) и (5) следует, что B – формальное понятие в контексте $< D, N_1 \cup N_2 >$.
Утверждение 2 доказано.

Следствие. $Con(B_1) + Con(B_2) \subseteq Con(B)$.

Пример 5. (Множества D, D_1, D_2, N, N_1 и N_2 заимствованы из примеров 1 и 3.)
Рассмотрим формальные понятия B_1 и B_2 для контекстов $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$:

$$\begin{array}{ll} B_1 = \{\ \{1,2\},\ \{1,3\}\ \}; & Con(B_1) = \{1\}, \\ B_2 = \{\ \{11,12\},\ \{11,13\},\ \{11,14\}\ \}; & Con(B_2) = \{11\}. \end{array}$$

В соответствии с утверждением 2 класс

$$B \quad = \quad \{b_1 + b_2 \in D \mid b_1 \in B_1 \ \text{ и } \ b_2 \in B_2\} \quad = \quad \{\ \{1,2,11,12\},\ \{1,3,11,13\}\ \}$$

является формальным понятием в контексте $< D, N >$ и $Con(B) = \{1, 11\}$.

Пример 6. Случай $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, $\quad Con(B_1) + Con(B_2) \subset Con(B)$

$$\begin{array}{lll} \text{Пусть} & D = \{\ \{1,4\},\ \{2,5\},\ \{2,3,4\}\ \}, & N = \{1,2,3,4,5\}, \\ & D_1 = \{\ \{1\},\ \{2\},\ \{2,3\}\ \}, & N_1 = \{1,2,3\}, \\ & D_2 = \{\ \{4\},\ \{5\},\ \{3,4\}\ \}, & N_2 = \{3,4,5\}, \\ & B_1 = \{\ \{2\},\ \{2,3\}\ \}, & Con(B_1) = \{2\}, \\ & B_2 = \{\ \{4\},\ \{3,4\}\ \}, & Con(B_2) = \{4\}. \\ \text{Тогда} & \multicolumn{2}{l}{B = \{b_1 + b_2 \in D \mid b_1 \in B_1 \ \text{ и } \ b_2 \in B_2\} = \{\ \{2,3,4\}\ \},} \\ & \multicolumn{2}{l}{B \text{ есть формальное понятие в контексте } < D, N > \text{ и } Con(B) = \{2,3,4\}.} \end{array}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая представленные результаты, отметим, что в задачах фрагментации и дефрагментации формальных контекстов объемы и содержания формальных понятий проявляют себя диаметрально противоположным образом. Если в задаче фрагментации необходимо заново "пересчитывать" объем понятия, то в задаче дефрагментации необходимо "пересчитывать" уже содержание понятия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ganter B., Wille R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations.* Springer, 1999.

2. Бочаров В.А., Маркин В.И. *Основы логики.* М.: Космополис, 1994.