Соловьев С.Ю.

Постановки задач современной информатики

park.glossary.ru/modern/

Задачи математического программирования

2015 – 2022

Напоминание: **З а д а ч а**

Дано	Известно
Исходные данные	***Свойства исх. данных***

Алгоритм / Метод / Способ / Схема

Требуется	такое, что
Результирующие данные	***Свойства рез. данных***

Математическое программирование – отрасль математики, в которой разрабатываются теория и численные методы решения экстремальных задач с ограничениями.

многомерных

ALT

задач на границах области допустимых решений.

Общая задача

математического программирования

Дано число n область D функция f(x) функции $g_i(x)$, i=1..m	Известно $D \subseteq R^n$, $D \neq \varnothing$ $f, g_i : D \rightarrow R$ доп.свойства

Метод = Метод(доп.свойства)

Требуется вектор x*	такой, что $x^* \in D'$ & $f(x^*) = \max \{ f(x) \mid x \in D' \}$, где $D' = \{ x \in D \mid g_i(x) \geq 0, i=1..m \}$

Терминология *МП*

$f(x)$ – целевая функция

$g_i(x)$ – ограничение

D – допустимое множество

$$f(x) \rightarrow extr$$
$$g_i(x) = 0$$
$$x \in D$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{выч. } x^* = \arg \operatorname*{extr}_{x \in D} f(x) \\ g_i(x) \geq 0 \quad i=1,\ldots,m \end{array}\right\}$$

Подзадачи *МП* (повиды *МП*)

- Задача линейного программирования
  - Транспортная задача
- Задача нелинейного программирования
- Задача целочисленного программирования
  - Задача булева программирования
- Задача динамического программирования
- Задача стохастического программирования
- Задача выпуклого программирования

• Задача линейного программирования

версия: D – гиперпараллелепипед

Дано	Известно
число n	$D =$
числа d_i, g_i $i=1..n$	$=\{ (x_1 \ldots x_n) \mid d_i \le x_i \le g_i \}$
числа $c_1, \ldots, c_n$	$f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$
числа $a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jn}$ $j=1..m$	$g_j(x) = a_{j0} + a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$

Метод

Требуется	
вектор x^*	такой, что $x^* \in D'$ &
	$f(x^*) = \max \{ f(x) \mid x \in D' \}$, где
	$D' = \{ x \in D \mid g_j(x) \ge 0, j=1..m \}$

• Задача линейного программирования

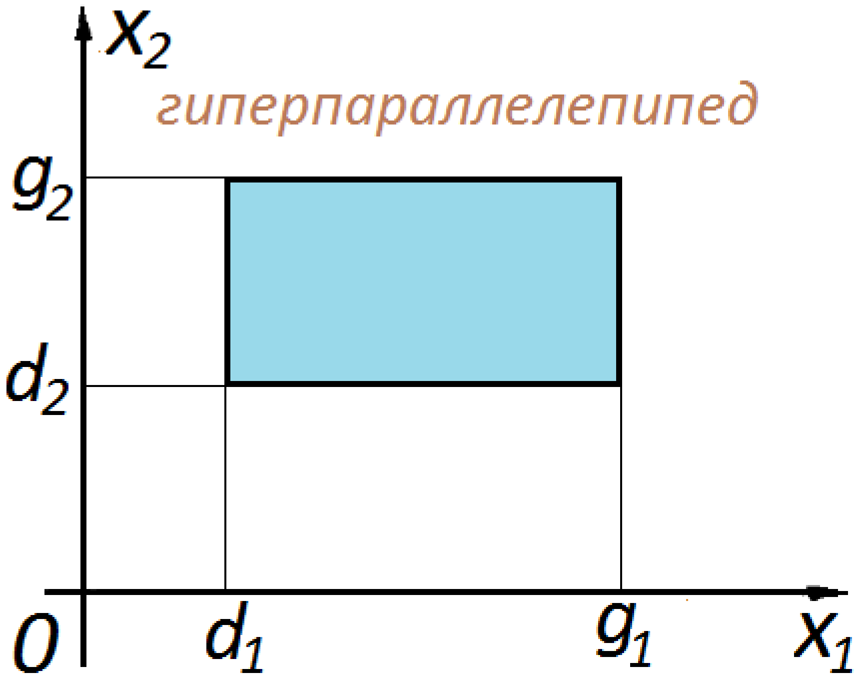
версия: D – ортант

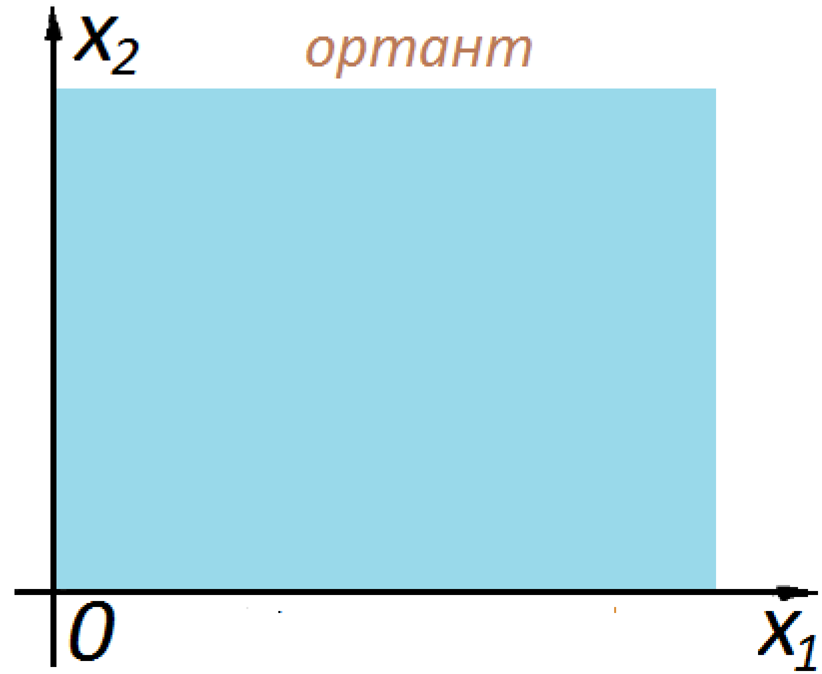
Дано	Известно
число n	$D = \{ (x_1 \dots x_n) \mid 0 \le x_i \}$
числа $c_1, \dots, c_n$	$f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$
числа $a_{j0}, a_{j1}, \dots, a_{jn}$ j=1..m	$g_j(x) = a_{j0} + a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n$

Метод

Требуется	
вектор x^*	такое, что $x^* \in D'$ &
	$f(x^*) = \max \{ f(x) \mid x \in D' \}$, где
	$D' = \{ x \in D \mid g_j(x) \ge 0, j=1..m \}$

Версии задачи линейного программирования (n = 2)





Расчет оптимального выпуска

$1 \quad 2 \quad \dots \quad n$ -- номенклатура выпускаемой продукции

$x_1 \quad x_2 \dots \quad x_n$ -- план выпуска в нат. единицах: кг | м

$c_1 \quad c_2 \dots \quad c_n$ -- доход от единицы продукции

складские запасы по видам сырья

$\mathbf{b_1} \quad a_{11} \quad \dots \quad a_{1n}$ -- расход 1-го сырья на ед. продукции

……

$\mathbf{b_m} \quad a_{m1} \quad \dots \quad a_{mn}$ -- расход m-го сырья на ед. продукции

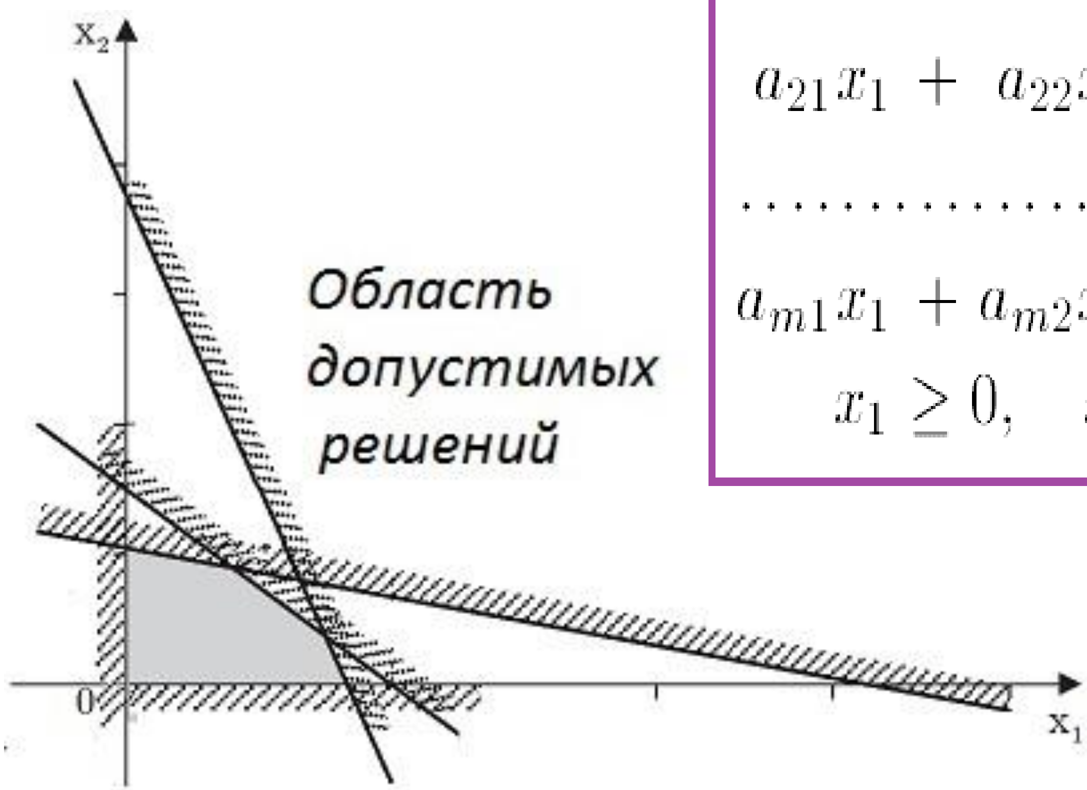
Вычислить **$x^* = \arg\max f(x)$** для **$x \in D'$**,

где $D = \{ (x_1 \dots x_n) \mid 0 \le x_i \; ; i = 1..n \}$

$$f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$g_j(x) = b_j - a_{j1}x_1 - \dots - a_{jn}x_n \qquad j = 1..m$$

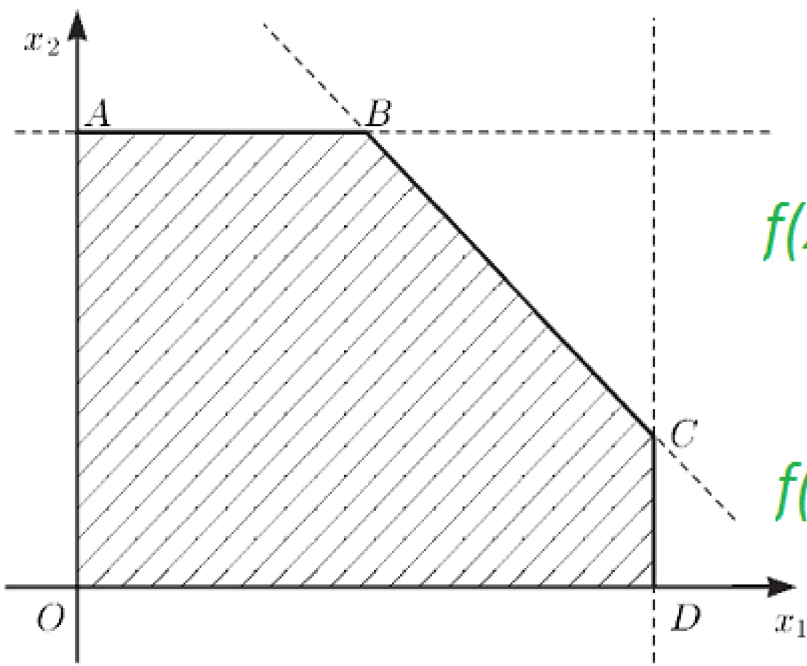
Подход к решению задачи линейного программирования (n = 2)

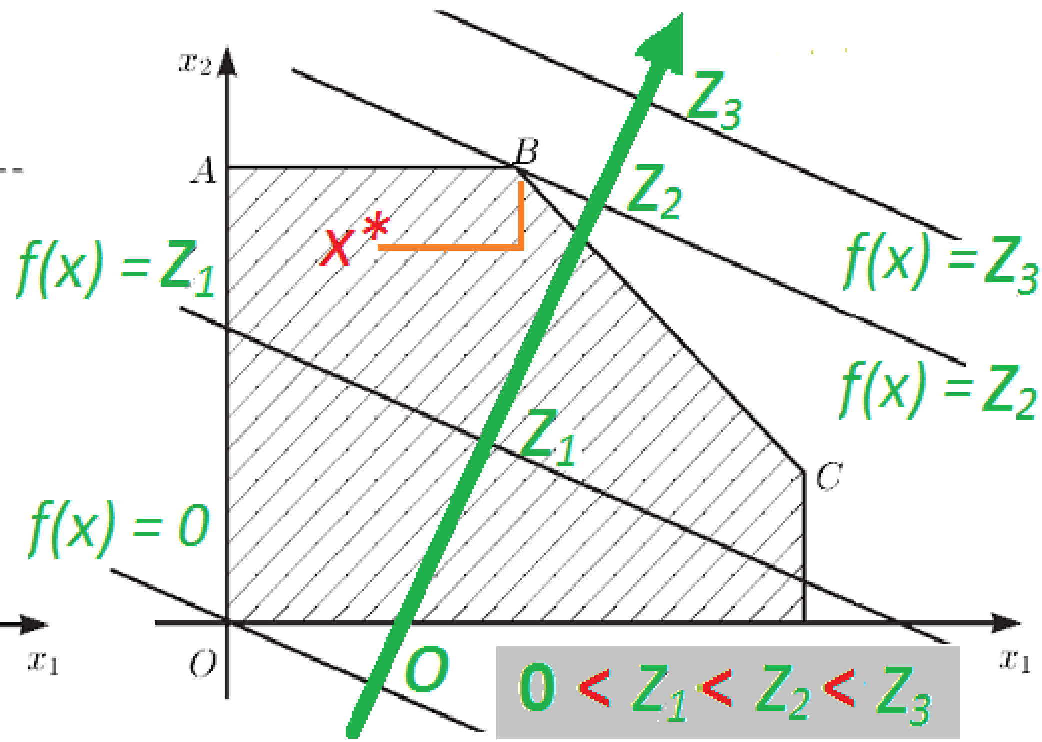


Канонический вид задачи линейного прогр.

$$
\begin{aligned}
c_1x_1 + \ c_2x_2 + \cdots + \ c_nx_n &\to \max,\\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,\\
x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad x_n &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Подход к решению задачи линейного программирования (продолжение)



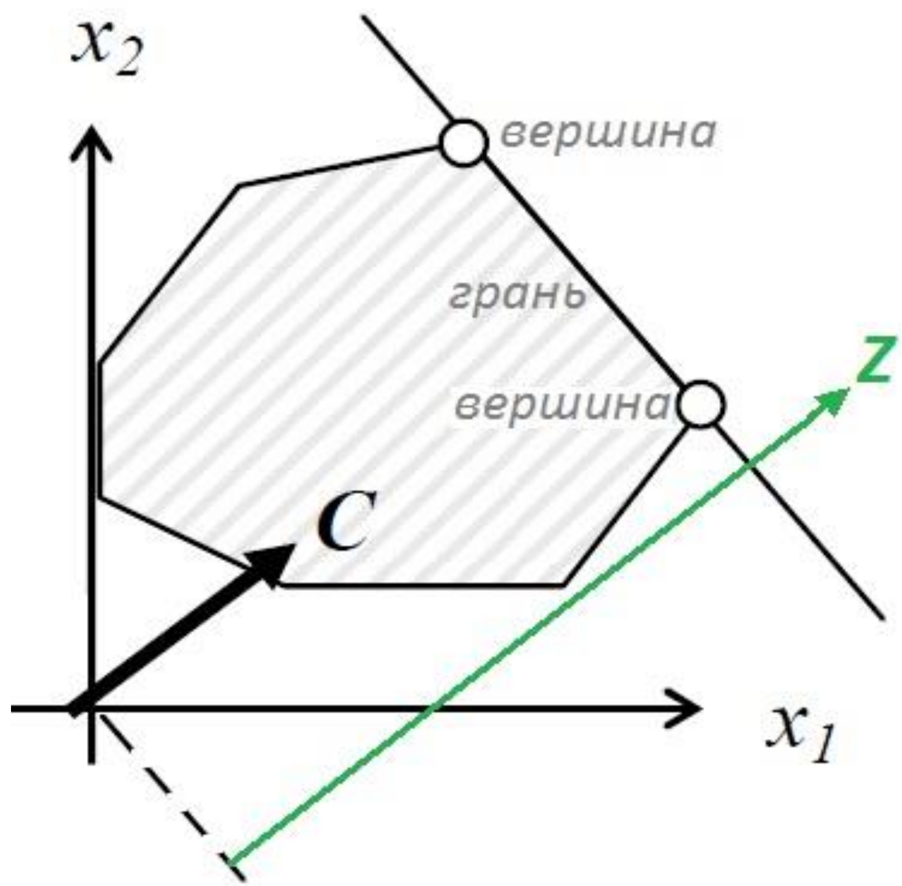


Подход к решению задачи линейного программирования (окончание)

Если область $\neq \varnothing$,

то f(x) достигает

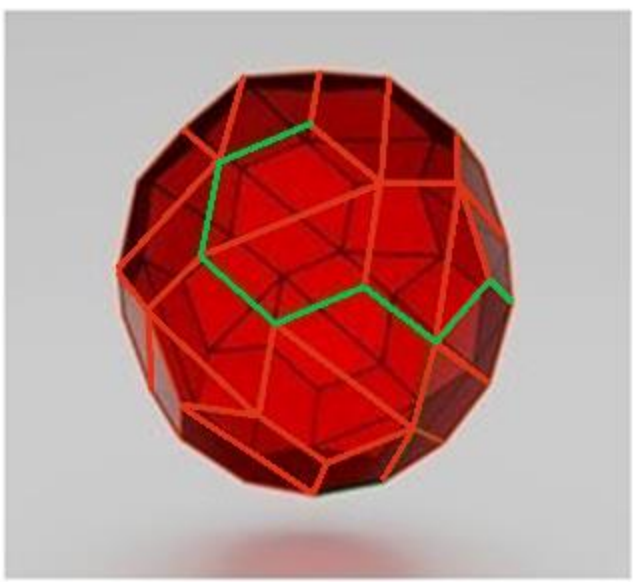
Extr в вершине.

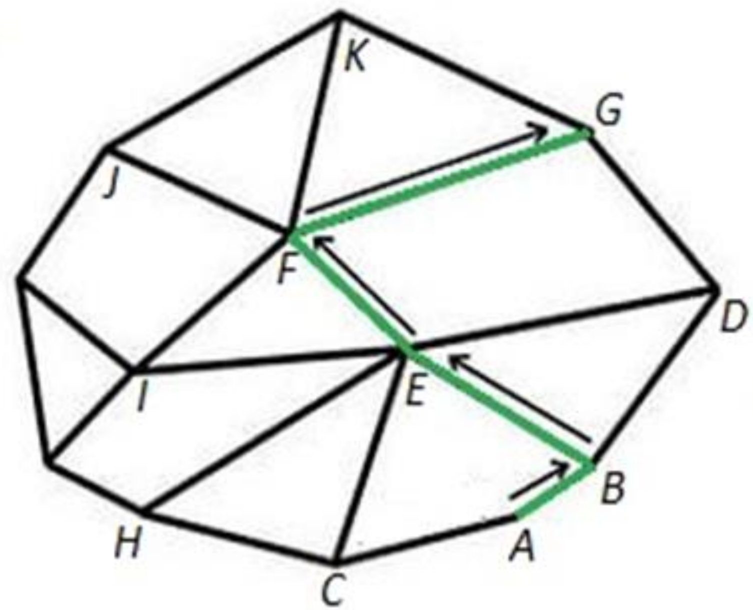


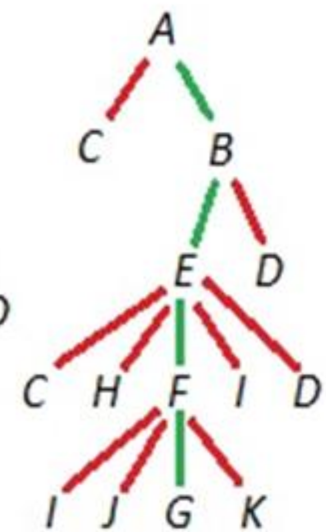
Опр. Вершина не является внутренней точкой отрезка, целиком принадлежащего области.

Симплекс- метод*) решения задачи линейного программирования

1. Выбор начальной вершины многогранника.
2. Целенаправленный перебор соседних вершин и переход к одной их них.







*) Дж.Данциг, 1949

Симплекс- метод – 2

Джордж Бернард Данциг
George Bernard Dantzig
1914 – 2005
США

Линейное программирование его обобщения
и применения. – М.: Прогресс, 1966 (1963).

Сложность симплекс-метода $= O(2^n)$
Сложность метода эллипсоидов $= O(n^8)$

Леонид Генрихович Хачиян, 1979

Задачи математического программирования

- Задачи линейного программирования
  - *Транспортные задачи* √

Дано m, n	m поставщиков, n потребителей
$a_1, \dots, a_m$	a_i – наличный ресурс
b_1: $c_{11}, \dots, c_{m1}$	b_j – потребность j-го потребителя
b_n: $c_{1n}, \dots, c_{mn}$	c_{ij} – цена поставки / ед.

Требуется *матрица!*	X_{ij} – объем поставки $i \to j$ такой, что
$x_{11}, \dots, x_{m1}$ .... $x_{1n}, \dots, x_{mn}$	$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

Транспортная задача

матричная постановка

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

необ. $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Прямая Двойственная задачи

$$
\begin{aligned}
c_1x_1 + \ c_2x_2 + \dots + \ c_nx_n \ &\to \max, \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ &= \ b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ &= \ b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ &= \ b_m, \\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1y_1 + \ b_2y_2 + \dots + \ b_my_m \ &\to \min, \\
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ &\geq \ c_1, \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ &\geq \ c_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}y_m \ &\geq \ c_n.
\end{aligned}
$$

Прямая и двойственная задача взаимозаменяемы

в части существования и
в части нахождения решения.

Задачи математического программирования

- Задачи линейного программирования
  - Задачи дискретного ЛП
    - Задачи булева программирования √
    - Задачи целочисленного дискр. ЛП √√

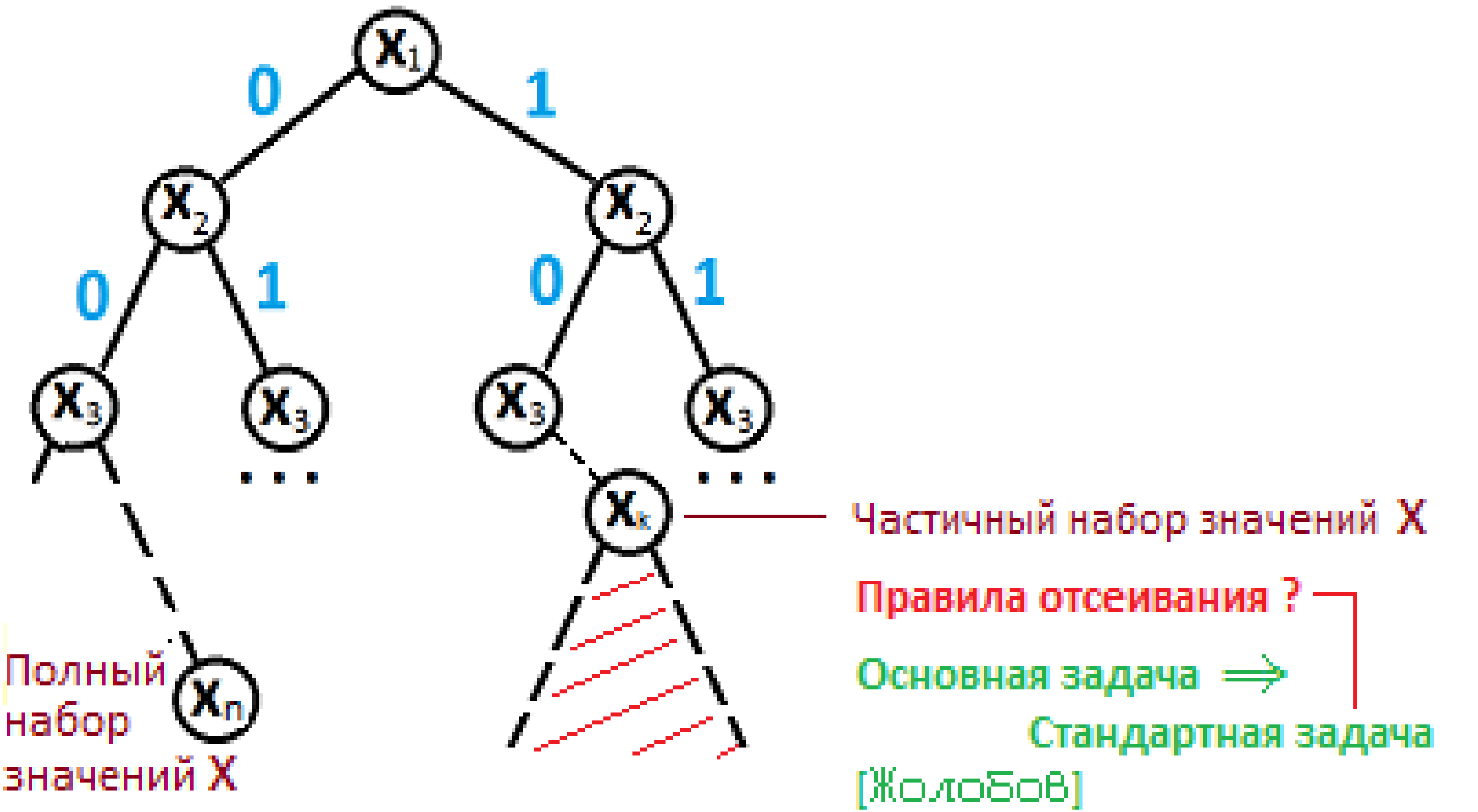
Основная задача булева программирования

Дано число n	Известно $x_i \in \{ 0,1\}$
числа $c_1, \ldots, c_n$	$D = \{ (x_1 \ldots x_n) \}$
числа $a_{j1}, \ldots, a_{jn}, b_j$	$f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$
$j=1..m$	$g_j(x) = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$

Идея: перебор [с отсеиванием] элементов D

Требуется вектор x^*	такой, что $x^* \in D'$ & $f(x^*) = \max \{ f(x) \mid x \in D' \}$, где $D' = \{ x \in D \mid g_j(x) \leq b_j \text{, } j=1..m \}$

Задача булева программирования
Дерево ветвления



Стандартная задача булева программирования

Дано число n числа $c_1, \ldots, c_n$ числа $a_{j1}, \ldots, a_{jn}, b_j$ $j=1..m$	Известно $x_i \in \{0,1\}$ $D = \{ (x_1 \ldots x_n) \}$ $f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ **$c_i \geq 0$** $g_j(x) = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$ **$a_{ji} \geq 0$**

Идея: перебор D с отсеиванием

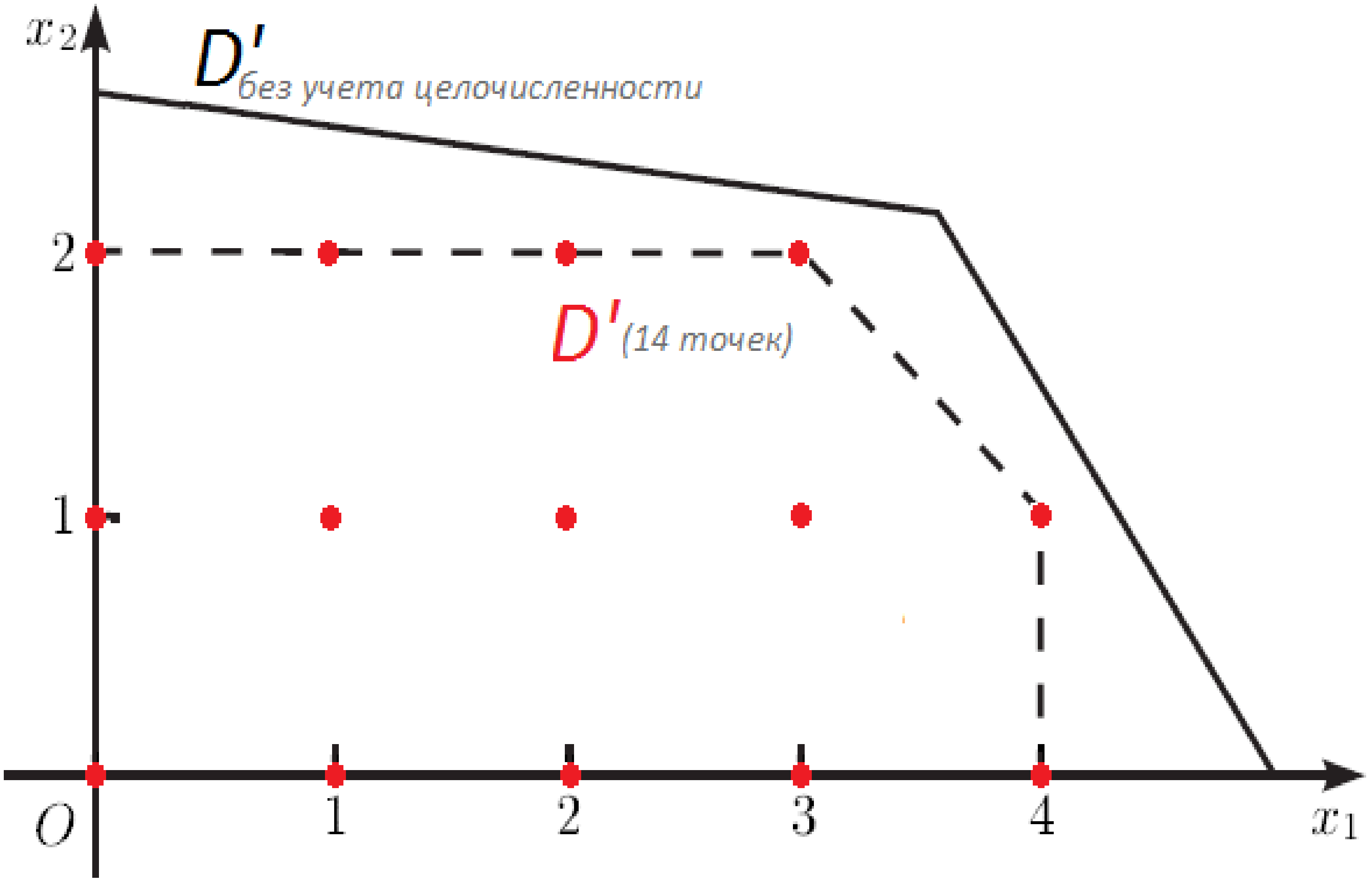
Требуется вектор x^*	такой, что $x^* \in D'$ & $f(x^*) = \max \{ f(x) \mid x \in D' \}$, где $D' = \{ x \in D \mid g_j(x) \leq b_j, j=1..m \}$

Задача целочисленного линейного программирования

Дано	Известно
число n	$D = \{ (x_1 \ldots x_n) \mid 0 \le x_i \} \in \mathbf{N}^n$
числа $c_1, \ldots, c_n$	$f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$
числа $a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jn}$ $j=1..m$	$g_j(x) = a_{j0} + a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$

Требуется	
вектор x^*	такой, что $x^* \in D'$ &
	$f(x^*) = \max \{ f(x) \mid x \in D' \}$, где
	$D' = \{ x \in D \mid g_j(x) = 0, j=1..m \}$

Область допустимых значений
задачи целочисленного программирования



Методы решения задач целочисленного ЛП

1. Методы отсечения: метод Гомори и др.

(A) *Выч.* ***Р****ешение ЗЛП без учета целочисленности.*

(B) *Если* ***Р****ешение* $\in N^n$*, то СТОП.*

(C) *Добавить в задачу новое условие, которое:*

-- отсекает ***Р****ешение, но*

-- сохраняет D'.

(D) *Перейти к* (A).

2. Методы ветвей и границ

(A) и (B) ----//----

(C) *Выбрать* $x_i^* \notin N$ *и разделить D'*

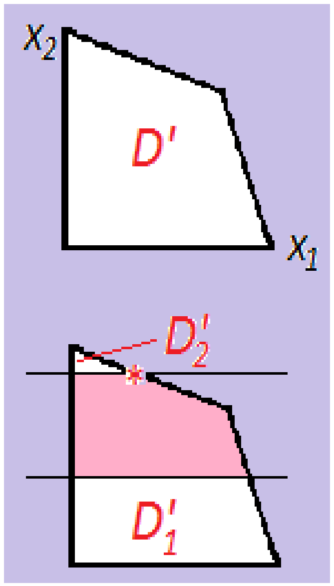
на $D'_1 = \{ x \in D' \mid x_i \leq [x_i^*] \}$ *и*

на $D'_2 = \{ x \in D' \mid x_i \geq [x_i^*]+1 \}$.

(D) Выбрать max из решений на D'_1 и D'_2 (рекурсия)

Метод ветвей и границ

разделение D’



$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to \max\\
&1.5x_1 + 0.5x_2 \leqslant 3.5\\
&x_1 + 3x_2 \leqslant 7\\
&0 \leqslant x_1\\
&0 \leqslant x_2
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&f(x^*) = 5.25\\
&x_1^* = 1.75\\
&x_2^* = 1.75
\end{aligned}
$$

D'

$x_2 \leqslant 1$ $\quad$ $x_2 \geqslant 2$

D'_1

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to \max\\
&1.5x_1 + 0.5x_2 \leqslant 3.5\\
&x_1 + 3x_2 \leqslant 7\\
&0 \leqslant x_1\\
&0 \leqslant x_2,\ x_2 \leqslant 1
\end{aligned}
$$

D'_2

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to \max\\
&1.5x_1 + 0.5x_2 \leqslant 3.5\\
&x_1 + 3x_2 \leqslant 7\\
&0 \leqslant x_1\\
&2 \leqslant x_2
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&f(x^*) = 4\\
&x_1^* = 1\\
&x_2^* = 2
\end{aligned}
$$

целочисленное решение

Решение исходной задачи

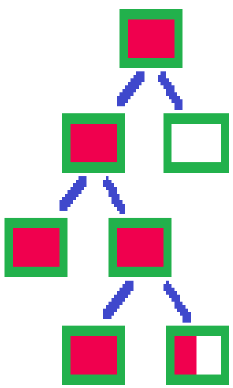
Метод ветвей и границ

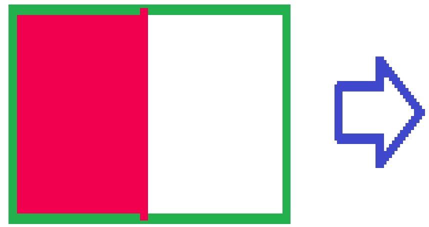
вычислительный процесс

старт $L = -\infty$

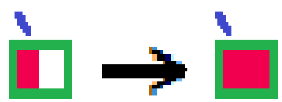
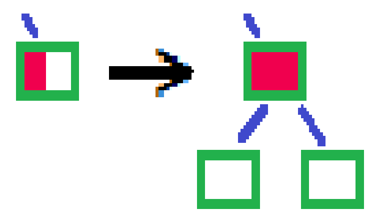
исх. задача

процесс





$f(x^*)$, x^*

x^* - целочисленное	x^* - нецелочисленное
	разделение
Если $L < f(x^*)$, то $L = f(x^*)$	

Задачи математического программирования

Задачи НЕлинейного программирования

- Задачи выпуклого программирования
  - Задачи с нелинейной целевой функцией и линейными ограничениями
    - √ Задачи дробно-линейного программирования
    - √√ Задачи квадратичного программирования
  - √√√ Задачи динамического программирования
  - Задачи с сепарабельной целевой функцией

C	Метод покоординатного спуска | Метод случайного поиска
C^1	Градиентные методы | Метод множителей Лагранжа
C^2	Метод Ньютона
$D \neq R^n$	Метод проекции градиента
	Метод возможных направлений
	Метод штрафных функций
	Метод барьерных функций

Задача нелинейного программирования как задача вычисления условного экстремума

Функции $f(x),\ g_i(x)$ $i = 1 \ldots m$	$f(x),\ g_i(x) \in C^1$

Метод множителей Лагранжа

Вектор x^0	$x^0 \in D$ & $f(x^0) = \min\{ f(x) \mid x \in D \}$ *где* $D = \{x :\ g_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$

Задача нелинейного программирования

Метод множителей Лагранжа

1. *Построить функцию* $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$

2. *Найти решение* $= (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

и $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$

системы

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} &= 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i} &= 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned}}$$

3. *Решение задачи есть* $\boldsymbol{x}^0$, *если существует*

Задача дробно-линейного программирования

Дано число n числа $c_1, \ldots, c_n$ числа $d_1, \ldots, d_n$ числа $a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jn}$ $j=1..m$	Известно $D = \{ (x_1 \ldots x_n) \mid 0 \le x_i \}$ $f(x)=$дробно-линейная **>** $g_j(x) = a_{j0} + a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$

Метод

Требуется вектор x^*	такое, что $x^* \in D'$ & $f(x^*) = \min \{ f(x) \mid x \in D' \}$, где $D' = \{ x \in D \mid g_j(x) \ge 0, j=1..m \}$

Дробно-линейная целевая функция

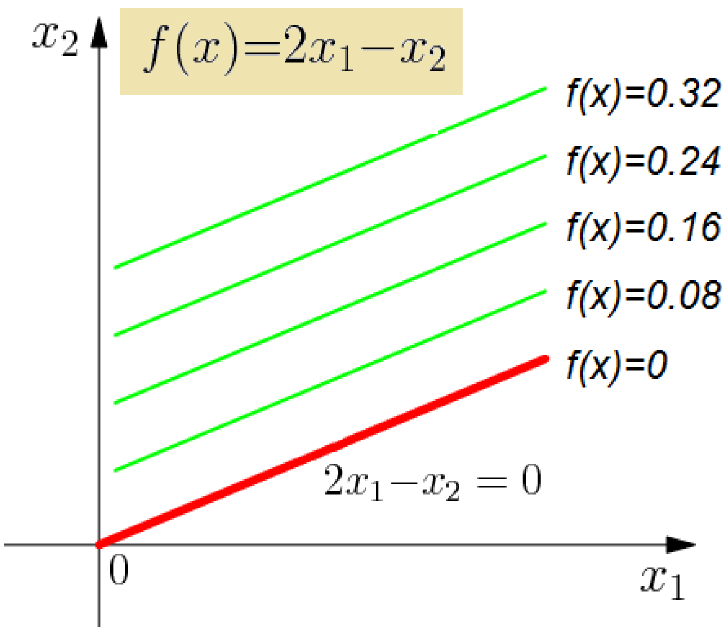
$$f(x) = \frac{c_1x_1 + \cdots + c_nx_n}{d_1x_1 + \cdots + d_nx_n}$$

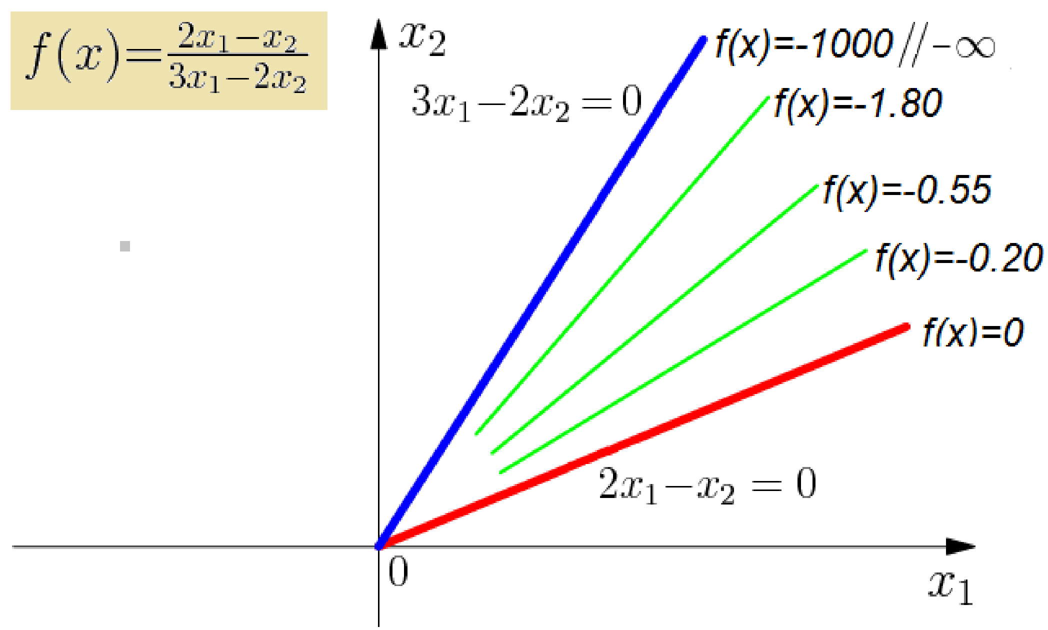
$$\frac{c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n}{d_0 + d_1x_1 + \cdots + d_nx_n}$$ сводится в f(x)

Линейная vs. дробно-линейная

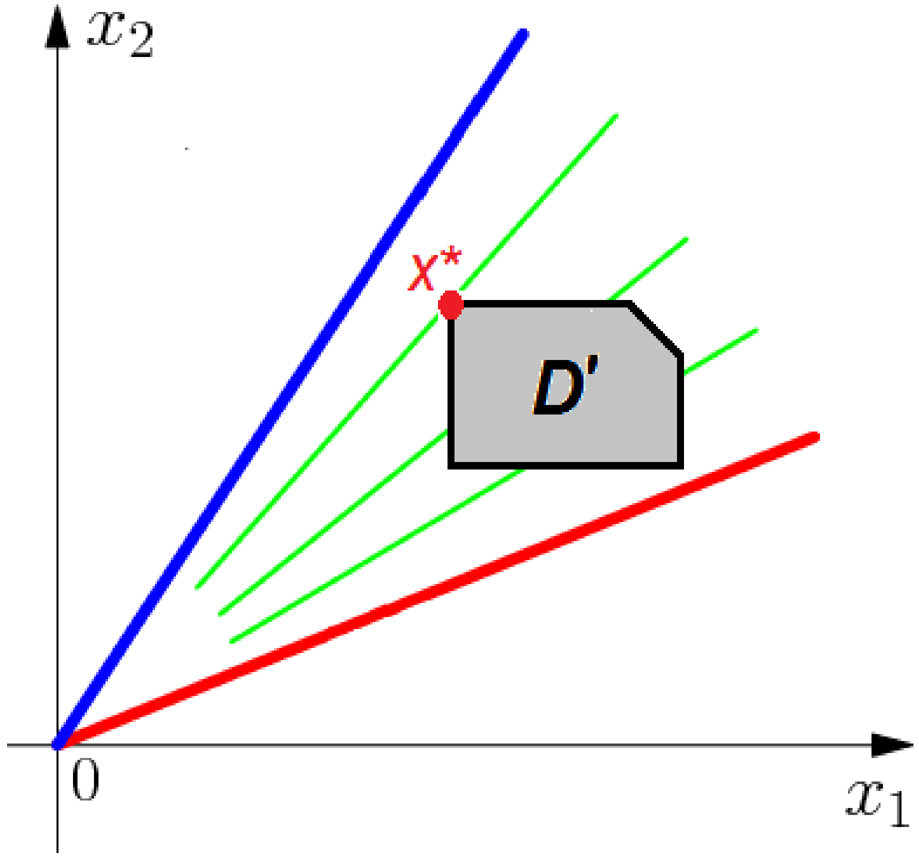
целевые функции (n = 2)

Линии уровня *f(x) = const*





Подход к решению задачи дробно-линейного программирования



Если область $\neq \varnothing$,

то f(x) достигает

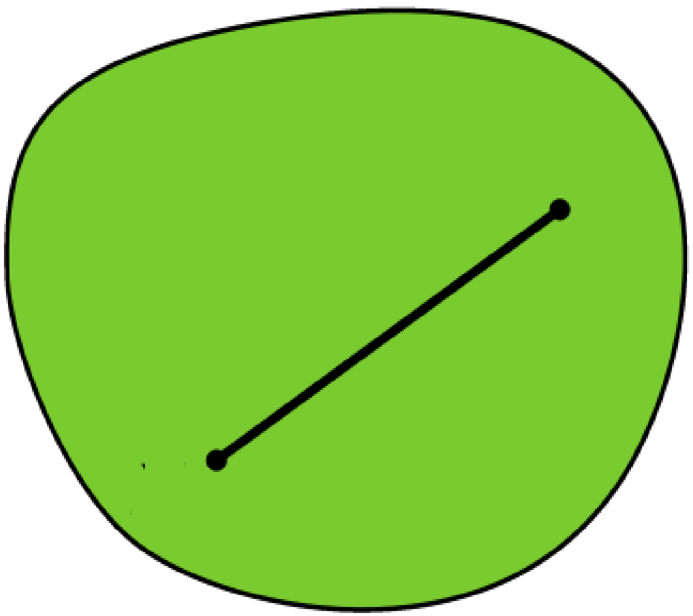
Extr в вершине.

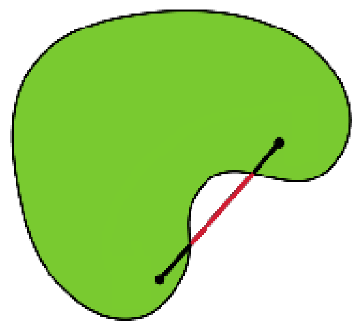
$\approx$ Симплекс-метод

Выпуклое программирование

основные понятия

Выпуклое множество





Невыпуклое множество

Постановка задачи выпуклого программирования

Функции $f(x)$, $g_i(x)$ $i = 1...m$	$f(x)$, $g_i(x)$ -- выпуклые

Методы выпуклого анализа

Вектор x^0	$x^0 \in D$ & $f(x^0) = min\{ f(x) \mid x \in D \}$ где $D = \{x : \ g_i(x) \leq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m\}$

Задача выпуклого программирования

теорема Куна-Таккера

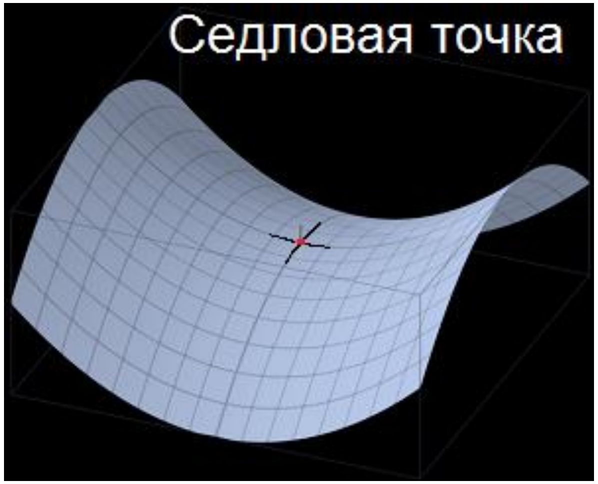
Если …[1]), то

x^* -- решение задачи вып.программ.

$\Leftrightarrow$ для нек. $\lambda^* \geq 0$

$$L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*),$$

где $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)$



----

[1]) $\exists\, x : g_i(x) < 0 \quad \forall i=1..m$

Задача квадратичного программирования

Дано		Известно
числа n, m		$f(x) = (Sx,x) + (c,x)$
вектор $c = (c_1, \ldots, c_n)$		$D = \{ x \mid 0 \le x \}$
вектор $b = (d_1, \ldots, d_m)$		S – симметричная, положительно[1]) определенная
матрица $S_{n \times n}$		
матрица $A_{m \times n}$		

Требуется	
вектор x^*	такой, что $x^* \in D'$ &
	$f(x^*) = \min \{ f(x) \mid x \in D' \}$, где
	$D' = \{ x \in D \mid Ax \le b \}$

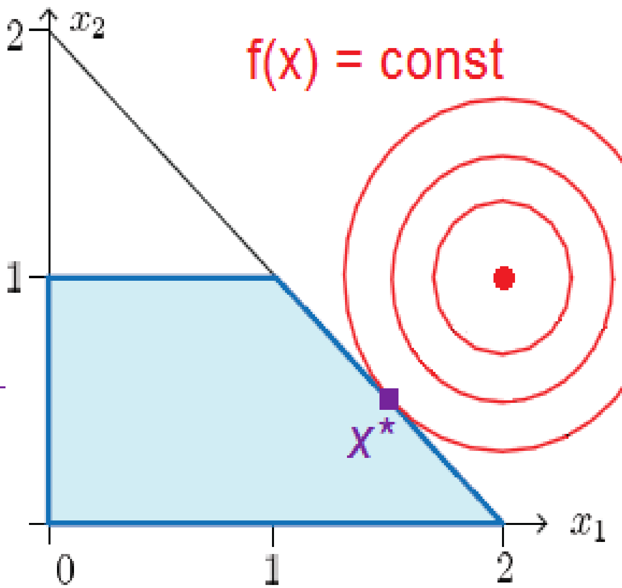
[1]) $\forall\ x \ne 0$ $(Sx,x) > 0$ | $(Sx,x) \ge 0$ | $(Sx,x) < 0$ | $(Sx,x) \le 0$ | пр.

Задача квадратичного программирования
пример

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ x_2 &\leqslant 1, \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Задача квадратичного программирования
метод Вулфа

Задача квадратичного программирования

Теорема Куна–Таккера

Система линейных уравнений с ограничениями

Задача линейного программирования

Симплекс-метод

Динамическое программирование

Ричард Эрнст Беллман
Richard Ernest Bellman
1920 – 1984
США

Динамическое программирование. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960 (1957).

Динамическое программирование

многомерная задача о максимизации

Дано: число R функции $g_1, \ldots, g_n$	Известно: $R > 0$ $g_i(x) \in C[0,R]$

Принцип оптимальности Беллмана

Найти числа $x_1, \ldots, x_n$	такие, что $x_i \geq 0$ & $x_1 + \ldots + x_n = R$ & *[max]* $g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n)$

Динамическое программирование

принцип оптимальности Беллмана

Определения: $f_1(x) = g_1(x)$,

$k = 2, \dots, n$ $\quad f_k(x) = \mathit{max}[g_1(x_1)+\dots+ g_k(x_k)]$

$\boxed{x_1+\dots+x_n=x}$

В частности $\quad f_n(R) = [\max]\, g_1(x_1) + \dots + g_n(x_n)$

$\boxed{x_1+\dots+x_n=R}$

Утверждение. $\quad f_k(x) = \mathit{max}\{f_{k-1}(j) + g_k(x-j)\}$

$\boxed{0 \le j \le x}$

Динамическое программирование

(начало примера-1)

К-во x	Доход $f_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0	0
1	4	3	6	8
2	6	4	9	10
3	8	7	11	11
4	13	11	13	12
5	16	18	15	18

x	$f_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0
1	4	6	8
2	7	9	10
3	9	11	11
4	13	13	12
5	18	15	18

```
K:=0;
for J:=0 to X do
if   K < f1(J)+g2(X-J)
then K:= f1(J)+g2(X-J);
f2(X):=K;
```

пусть

$X = 3 = 0 + 3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3 + 0$

$f_1(3)+g_2(0) = 8+0$

max

$f_1(2)+g_2(1) = 6+3 = \boxed{9}$

$f_1(1)+g_2(2) = 4+4 = 8$

$f_1(0)+g_2(3) = 0+7 = 7$

Динамическое программирование

(конец примера-1)

x	$f_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$

x	$f_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0
1	6	8
2	10	10
3	13	11
4	16	12
5	19	18

x	$f_4(x)$
0	0
1	8
2	14
3	18
4	21
5	$\boxed{24}$

$$24 = f_3(4) + g_4(1) \qquad 8$$

$$\parallel$$

$$f_2(2) + g_3(2) \qquad 9$$

$$\parallel$$

$$f_1(2) + g_2(1) \qquad 3$$

$$\parallel$$

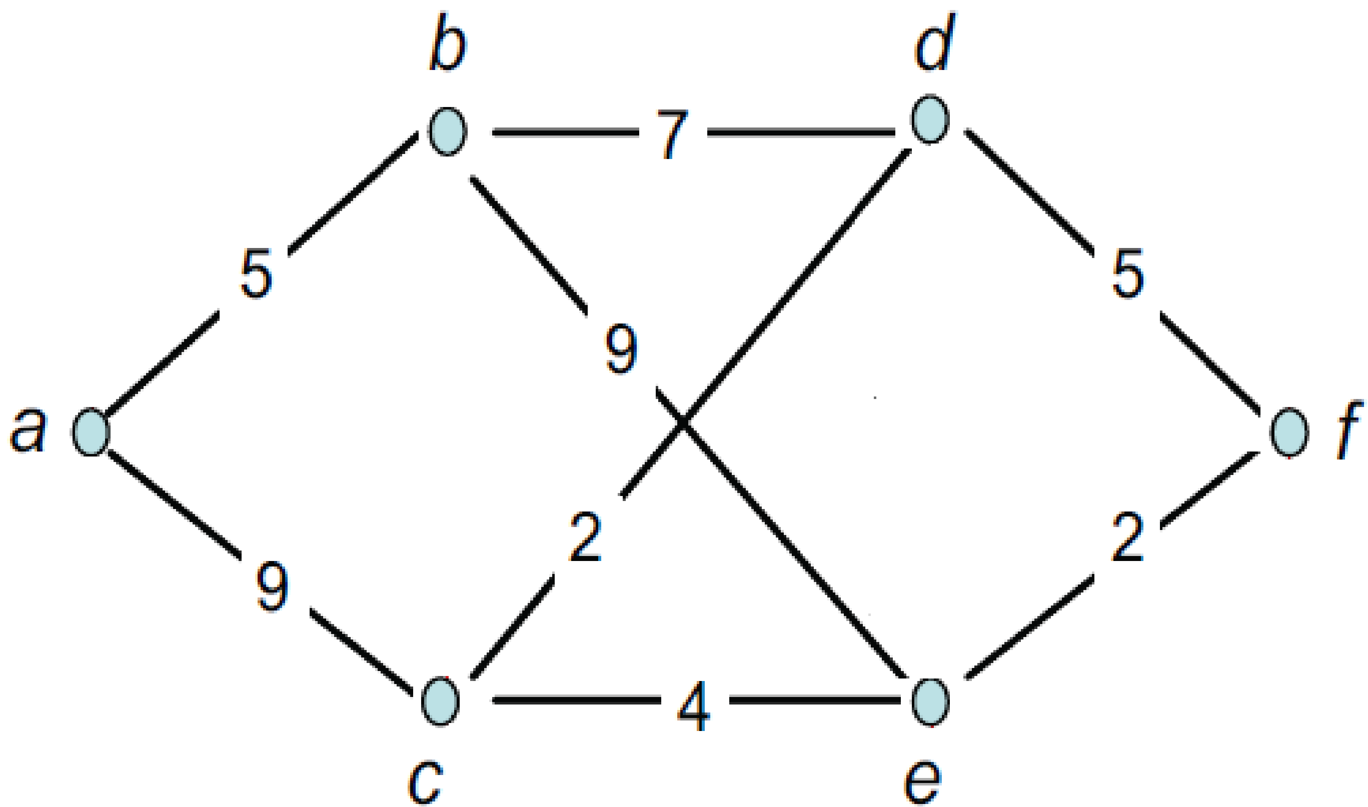
$$g_1(1) \qquad 4$$

План: 1 + 1 + 2 + 1

Динамическое программирование

пример-2

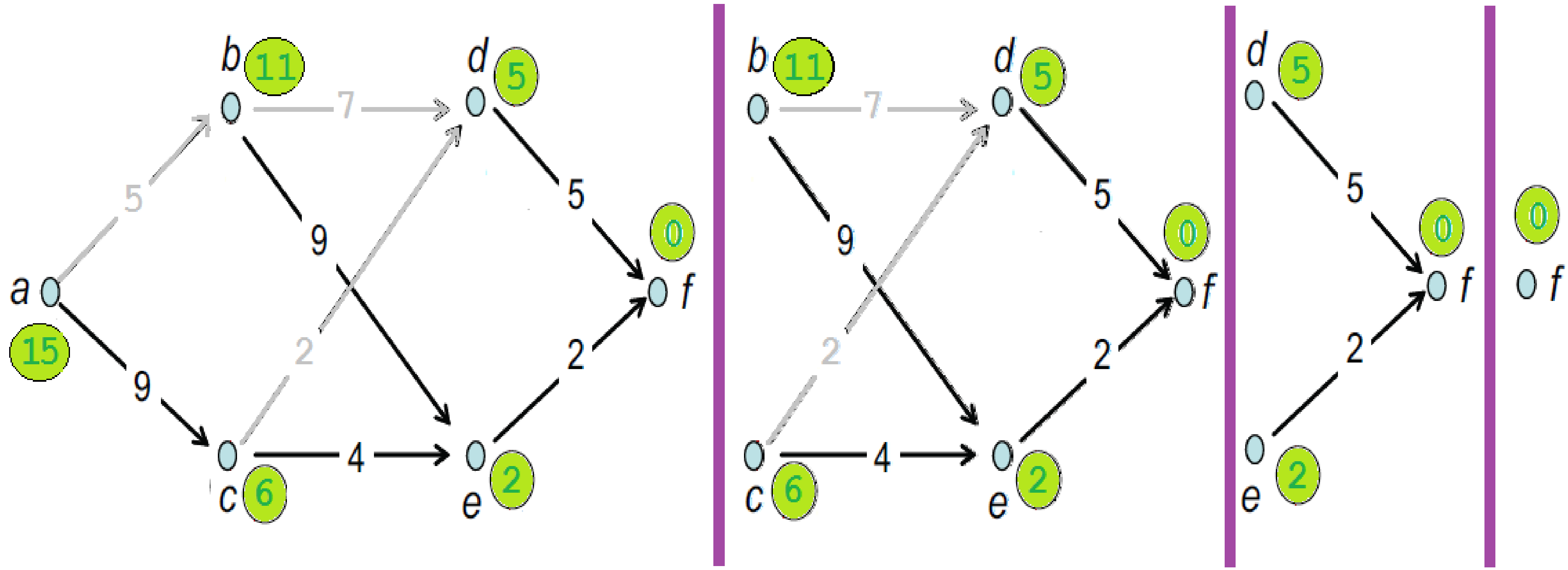
Найти кратчайший путь от a до f



Динамическое программирование

пример-2 (решение)

Попятная процедура



Решение: a -- c -- e -- f

Динамическое программирование

принцип оптимальности Беллмана

(пример)

$$max\{g_1(n_1)+g_2(n_2)+g_3(n_3)+g_4(n_4) \mid n_1+n_2+n_3+n_4 = R;\ 0 \le n_i\}=$$

$$f_4(S) = max\,\{f_3(S_3) + g_4(S-S_3) \mid 0 \le S_3 \le S\}$$

$$f_3(S_3) = max\,\{f_2(S_2) + g_3(S_3-S_2) \mid 0 \le S_2 \le S_3\}$$

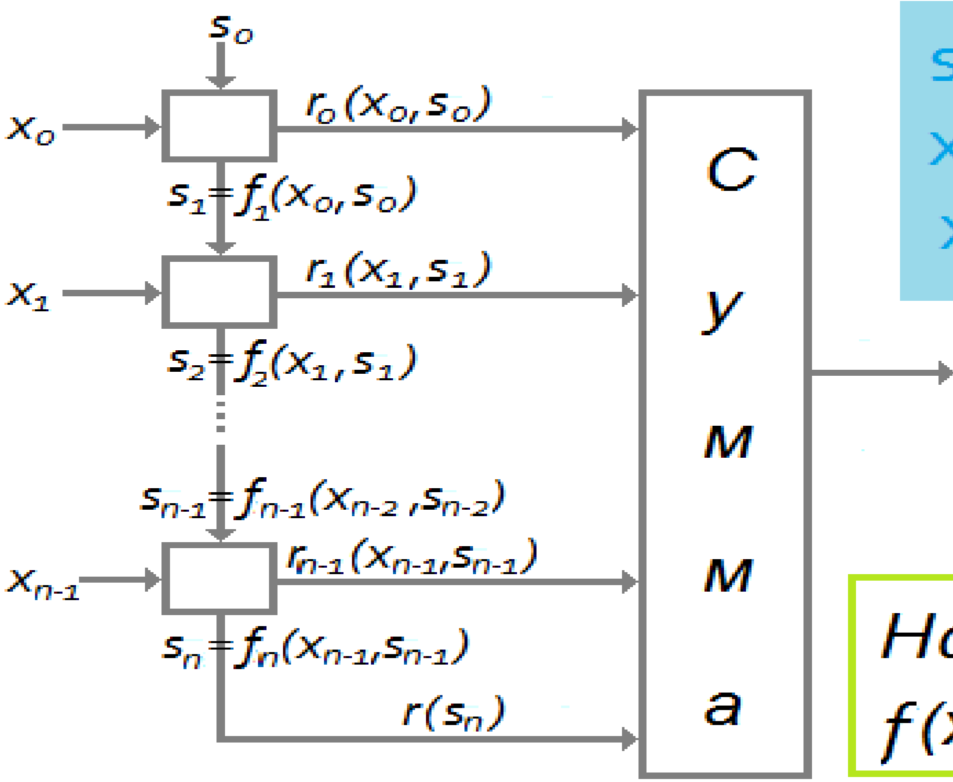
$$f_2(S_2) = max\,\{f_1(S_1) + g_2(S_2-S_1) \mid 0 \le S_1 \le S_2\}$$

$$f_1(S_1) = g_1(S_1)$$

X :	0	1	2	3	. . .	S	
$f_1(X)$:	#	#	#	#		#	$\rightarrow n_1$
$f_2(X)$:	#	#	#	#		#	$\rightarrow n_2$
$f_3(X)$:	#	#	#	#		#	$\rightarrow n_3$
$f_4(X)$:	#	#	#	#		#	$\rightarrow n_4$

Динамическое программирование

задача оптимального управления



s_i -- состояние из S

x_i -- решение | управление

x^* -- оптимальное

$f(x, s_0)$
целевая функция

Найти x^*:

$f(x^*, s_0) = \min f(x, s_0)$

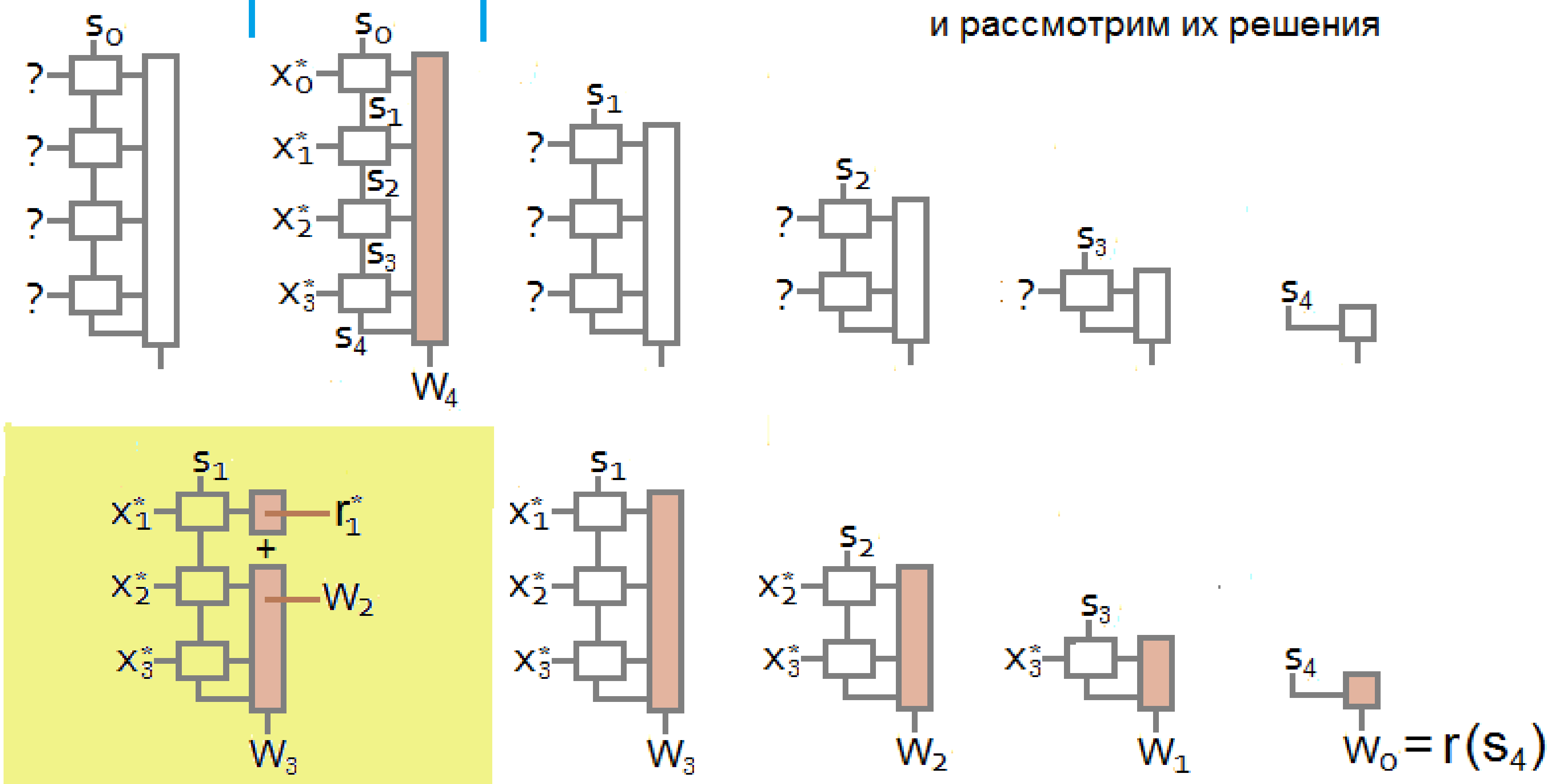
Принцип оптимальности Р.Беллмана

Отрезок оптимального процесса от любой его точки до конца процесса сам является оптимальным процессом с началом в данной точке.

Динамическое программирование

принцип оптимальности Беллмана

Рассмотрим | Пусть | Формально составим 4 задачи и рассмотрим их решения



$$W_3 = W_2 + r_1^*$$

$$W_1 = W_0 + r_3^*$$

$$W_4 = W_3 + r_0^*$$

$$W_2 = W_1 + r_2^*$$

Динамическое программирование

попятная процедура: вычисление функции $W_k(s)$ и $\Phi_k(s)$

$W_k : S \to$ число $\qquad \Phi_k : S \to$ управление

k=n-1 >> $W_k(s)$ >> $x = \Phi_k(s) = \text{argmin}\,\{ f_k(x,s)+W_k(s) \mid x \in D \}$

k=n-2 >> $W_k(s)$ >> $x = \Phi_k(s) = \text{argmin}\,\{ f_k(x,s)+W_k(s) \mid x \in D \}$

… … … …

k=0 >> $W_k(s)$ >> $x = \Phi_k(s) = \text{argmin}\,\{ f_k(x,s)+W_k(s) \mid x \in D \}$

где $W_n(s) = r(s)$,

$W_k(s) = \min \{ f_k(x,s)+W_k(s) \mid x \in D \}$, $\quad k = 0 \ldots n-1$

Динамическое программирование

прямая процедура: решение задачи

s_0 задано >> $x_0 = \Phi_0(s_0)$

$s_1 = f_1(s_0, x_0)$ >> $x_1 = \Phi_1(s_1)$

$s_2 = f_2(s_1, x_1)$ >> $x_2 = \Phi_2(s_2)$

… … … …

$s_{n-1} = f_{n-1}(s_{n-2}, x_{n-2})$ >> $x_{n-1} = \Phi_{n-1}(s_{n-1})$

Зарубки:

- прямая и двойственные задачи;
- симплекс-м. **vs.** м.эллипсоидов.

В о п р о с ы?

soloviev@glossary.ru