Соловьев С.Ю.

Постановки задач современной информатики

park.glossary.ru/modern/

Задачи численного анализа

Часть 2

2015 – 2022

Напоминание: **З а д а ч а**

Дано	Известно
Исходные данные	***Свойства исх. данных***

Алгоритм / Метод / Способ / Схема

Требуется	такое, что
Результирующие данные	***Свойства рез. данных***

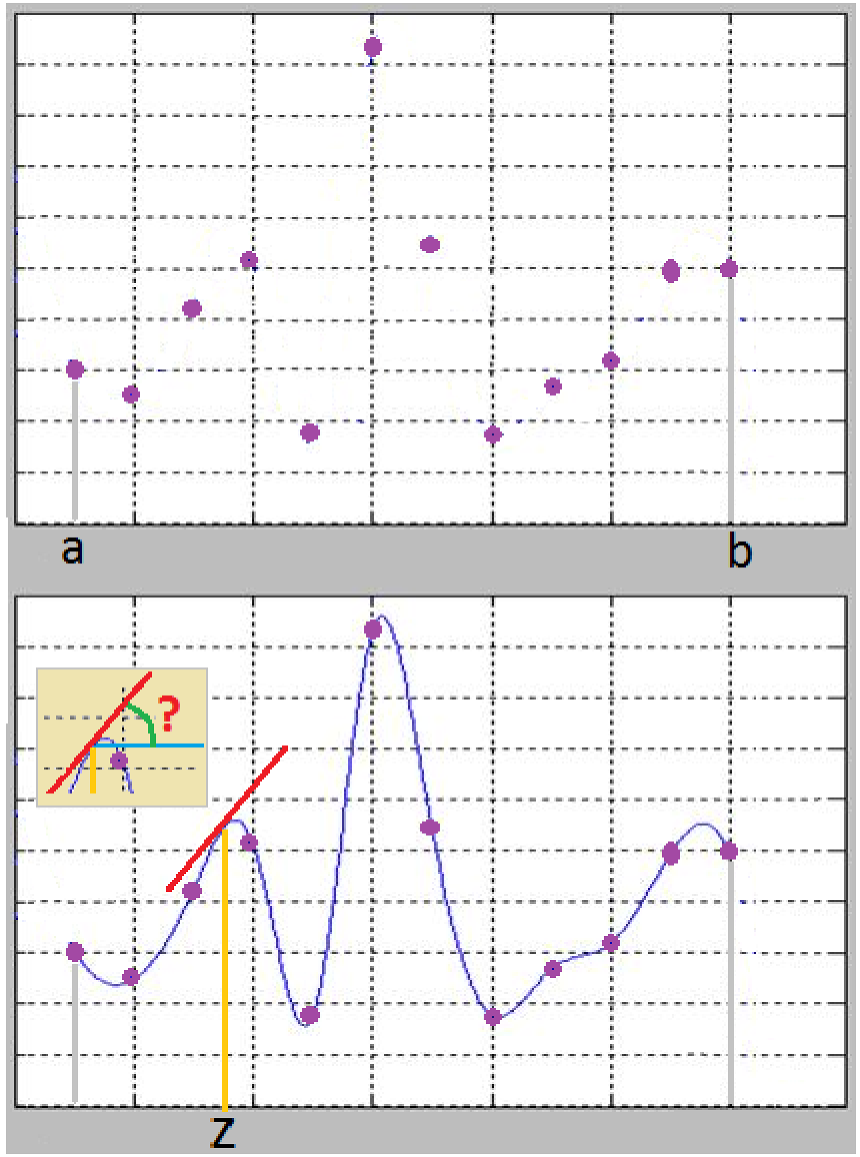
Классы задач численного анализа
для $f : R \to R$

- (√) интерполирование
- (√) приближение
- (√) сглаживание $\Rightarrow$ матем.статистика
- дифференцирование
- интегрирование
- вычисление корней
- поиск экстремумов $\Rightarrow$ матем.програм.

• Задачи дифференцирования

Дано:

Требуется:



≈Постановка задачи дифференцирования

Дано	Известно
$x_0 \quad y_0$ $x_1 \quad y_1$ $\ldots$ $x_n \quad y_n$	$x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$
число $\boldsymbol{z}$	$y_i = f(x_i)$ для нек. $f(x)$ из $C^2[a,b]$

Требуется	такое, что
число y'_z	$y'_z = f'(z)$

Подход к численному дифференцированию

$f(x) = \varphi(x) + R(x)$ интерполяционный + остаточный член

$f'(x) = \varphi'(x) + R'(x)$

$f'(x) \approx \varphi'(x)$ $R'(x)$ – погрешность

Задача некорректна:

$\exists\ f(x)$ и $\varphi_k(x)$ $(k = 1,2, \ldots)$ на $C^1[a,b]$:

$\rho(f, \varphi_k) \to 0$ при $k \to \infty$

$\rho(f', \varphi'_k) \to \infty$ при $k \to \infty$

Задача дифференцирования в узлах

Дано	Известно
$x_0 \quad y_0$ $x_1 \quad y_1$ $\cdots$ $x_n \quad y_n$	$x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$ $y_i = f(x_i)$ для нек. $f(x)$ из $C^2[a,b]$ равноотстоящие узлы

N.B.

Метод

Требуется	такое, что
$y_0', \ y_1', \ \ldots \ y_n'$	$y_i' = f'(x_i)$

Стандартное решение

$n = 2$ (три точки):

$y_0 = f(x_0) \qquad y_1 = f(x_0+h) \qquad y_2 = f(x_0+2h)$

Идея: $f(x) = L_2(x) + R(x)$

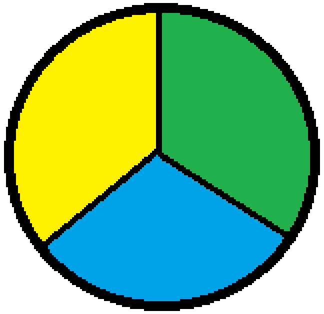
$$y_0' = \frac{1}{2h}[-3y_0 + 4y_1 - y_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{2h}[y_2 - y_0] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{2h}[y_0 - 4y_1 + 3y_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi).$$

• Задачи интегрирования

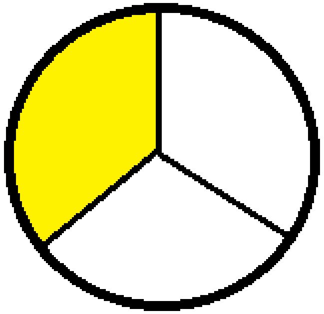
(общий подход)



Дано	Известно
$f(x)$ – функция на $[a,b]$	

Требуется	такое, что	
число F	$F = \sum_{k=1}^{n} C_{k/n}\, f(x_{k/n})$	**кв**адратурная **ф**ормула
[число R]	$\{C_{k/n}\}_{k=1}^{n}$	коэффициенты кв.ф.
	$\{x_{k/n}\}_{k=1}^{n} \in [a,b]$	узлы кв.ф.
	$F \approx \int_a^b f(x)\,dx$	
	$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - F$	остаточный член кв.ф.

Задачи построения кв.формул
с наилучшей оценкой на классе функций

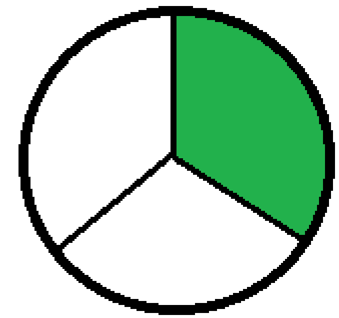


Дано	Известно
$[a,b]$	
целое n	
$f(x) \in$ Класс на $[a,b]$	

Требуется	такое, что
$\{C_{k/n}\}_{k=1}^{n}$	$[\min]\ \max\limits_{\substack{x \in [a,b] \\ f \in \text{Класс}}} \lvert R(f) \rvert$
$\{x_{k/n}\}_{k=1}^{n}$	*Необ:* Условия на $C_{k/n}$ и $x_{k/n}$

Задачи построения кв.формул

наилучшей степени точности

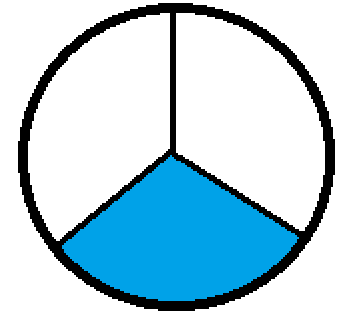


Дано $[a,b]$	Известно
целое n	$\forall p \quad \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{p}$ -- система Чебышева на $[a,b]$
$\{x_{k/n}\}_{k=1}^{n}$	

Требуется	такое, что $[\max]\ p$:
целое p	$\forall\, f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k\, \varphi_k(x)$ имеет место
$\{C_{k/n}\}_{k=1}^{n}$	$\sum\limits_{k=1}^{n} C_{k/n}\, f(x_{k/n}) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Задачи построения интерполяционных квадратурных формул

Дано	Известно
$[a,b]$	
целое n	
$f(x) \in$ Класс на $[a,b]$	
$\{x_{k/n}\}_{k=1}^{n}$	

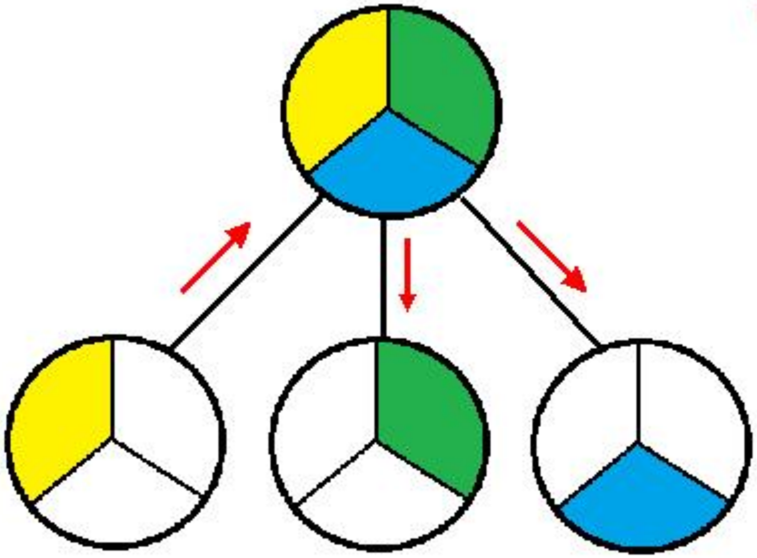


Требуется	такое, что
$\{C_{k/n}\}_{k=1}^{n}$	$F = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{k/n}\, f(x_{k/n})$
число F [число R]	$R = \int\limits_a^b f(x)\,dx - F$

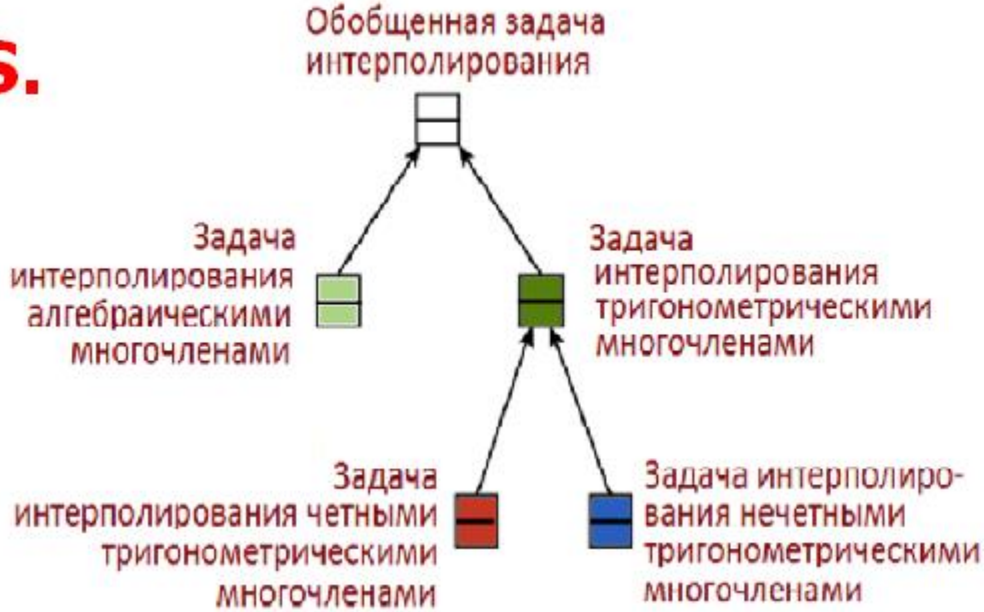
Идея: $f(x) = \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)}_{\text{интерполяционный многочлен}} + R(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \phi_k(x)\, f(x_{k/n}) + R(x)$

$$C_{k/n} = \int\limits_a^b \phi_k(x)\,dx \qquad R = \int\limits_a^b R(x)\,dx$$

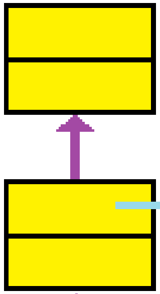
Иерархии задач



vs.



Формулы Ньютона -- Кортеса



Задача построения интерполяционных кв.ф.

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots$

$a \quad h \quad h \quad h \quad \dots \quad b$

$h = \dfrac{b-a}{n} \qquad x_i = a + hi$

$f(x) = L_n(x) + R(x)$ $\quad L_n(x)$ – *мн-н Лагранжа*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=1}^{n} l_{i/n} f(a+hi)$$

Проблема: $\| l_{i/n} \| \to \infty$ при $n \to \infty$

$n = 0$ формула прямоугольников

$n = 1$ формула трапеций

$n = 2$ формула Симпсона

Вычислительные проблемы формул Ньютона -- Кортеса

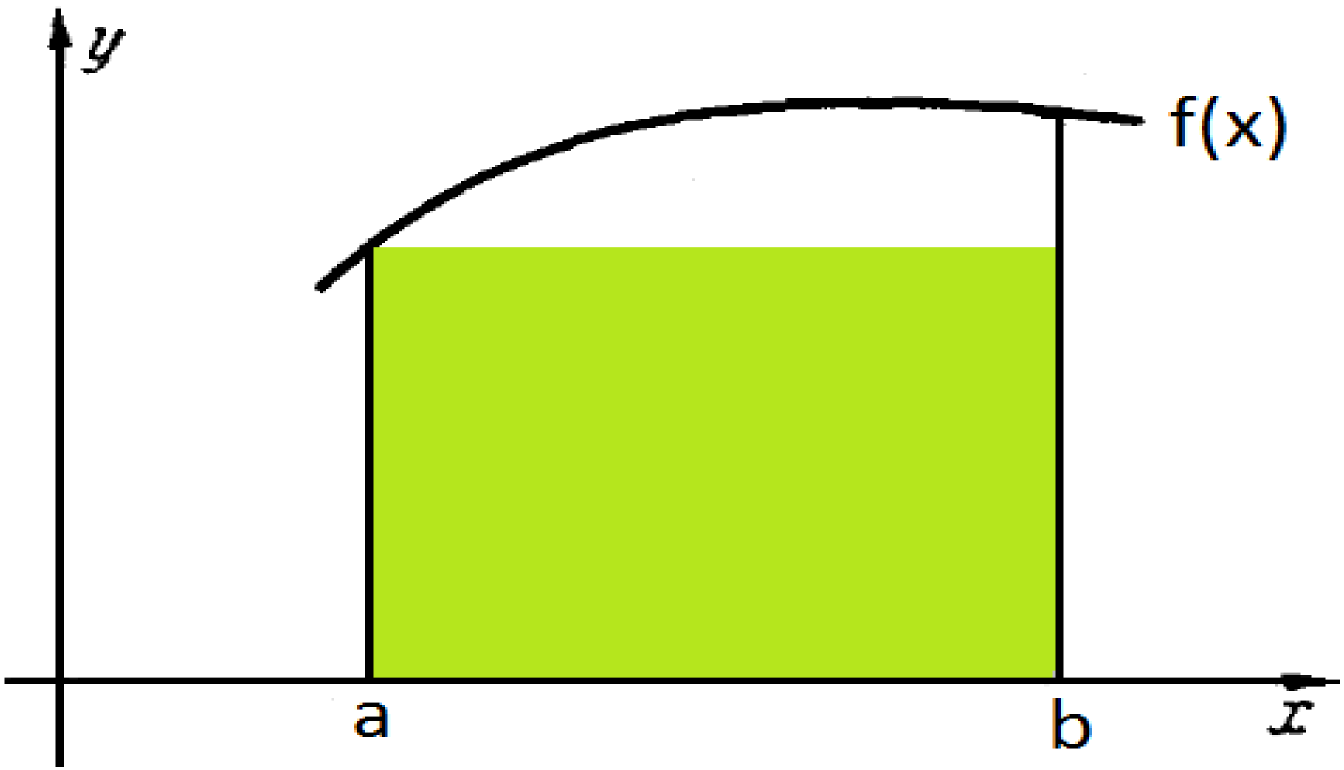
$$I_{4/7} = -\frac{2459}{945}$$

$$I_{4/8} = -\frac{1711}{4480}$$

$$I_{4/9} = -\frac{55070}{9072}$$

$$I_{4/10} = -\frac{17085616}{7257600}$$

Формула прямоугольников n=0

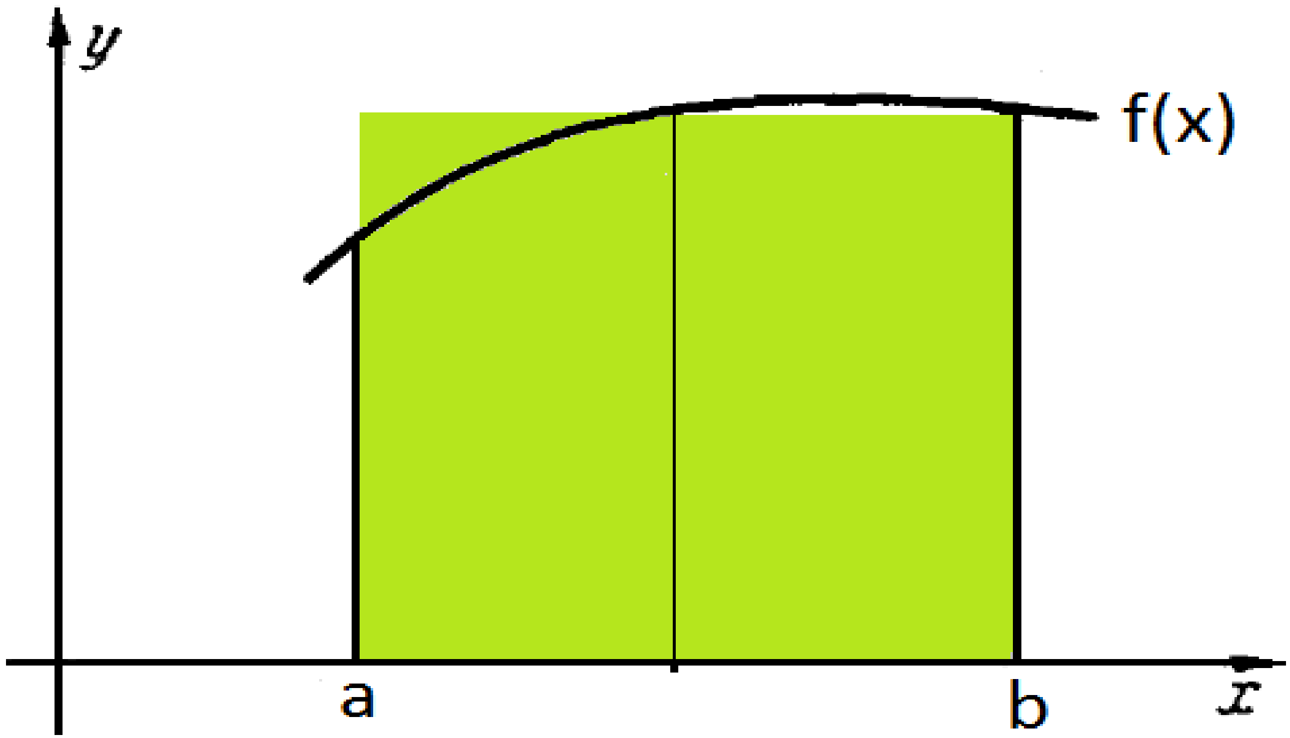


$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{(b-a)f(a)} + \overline{R}_0(f)$$

предпочтительно
по точности

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

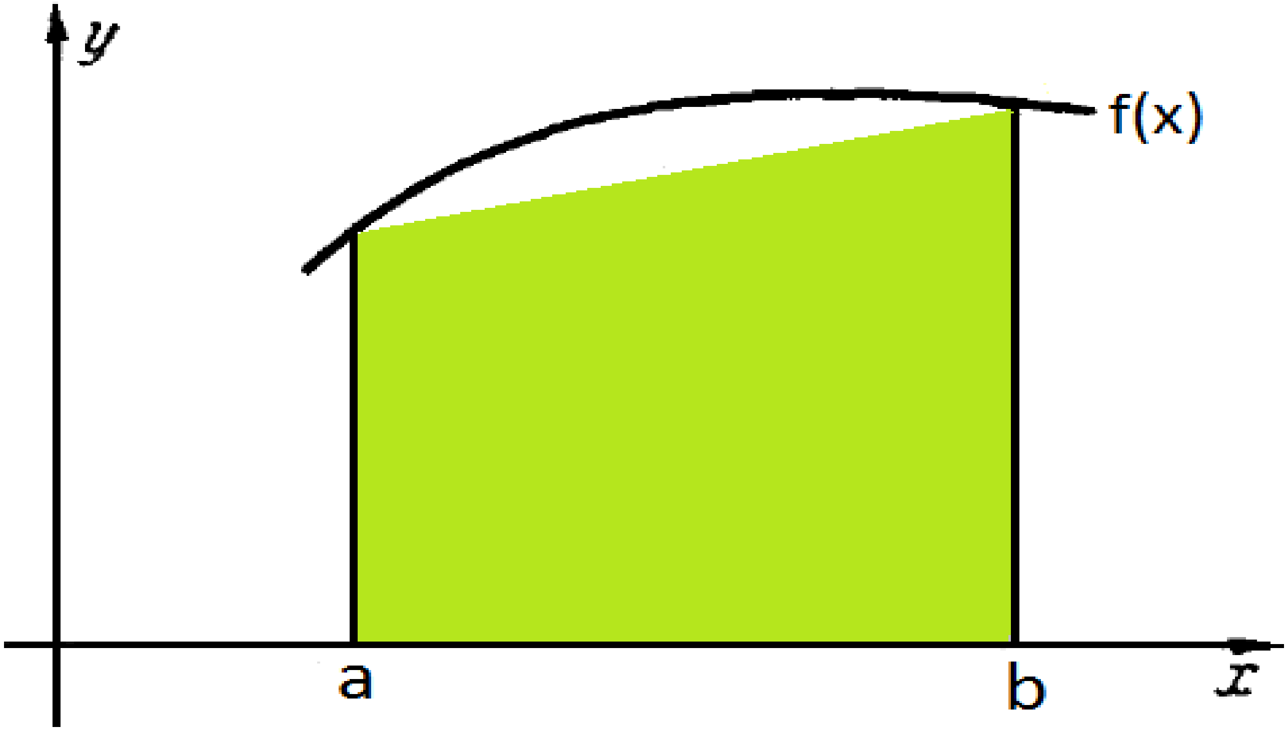
Формула средних прямоугольников n=0



$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)} + R_0(f)$$

$$R_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(z) \quad \text{для нек. } z \text{ из } [a,b]$$

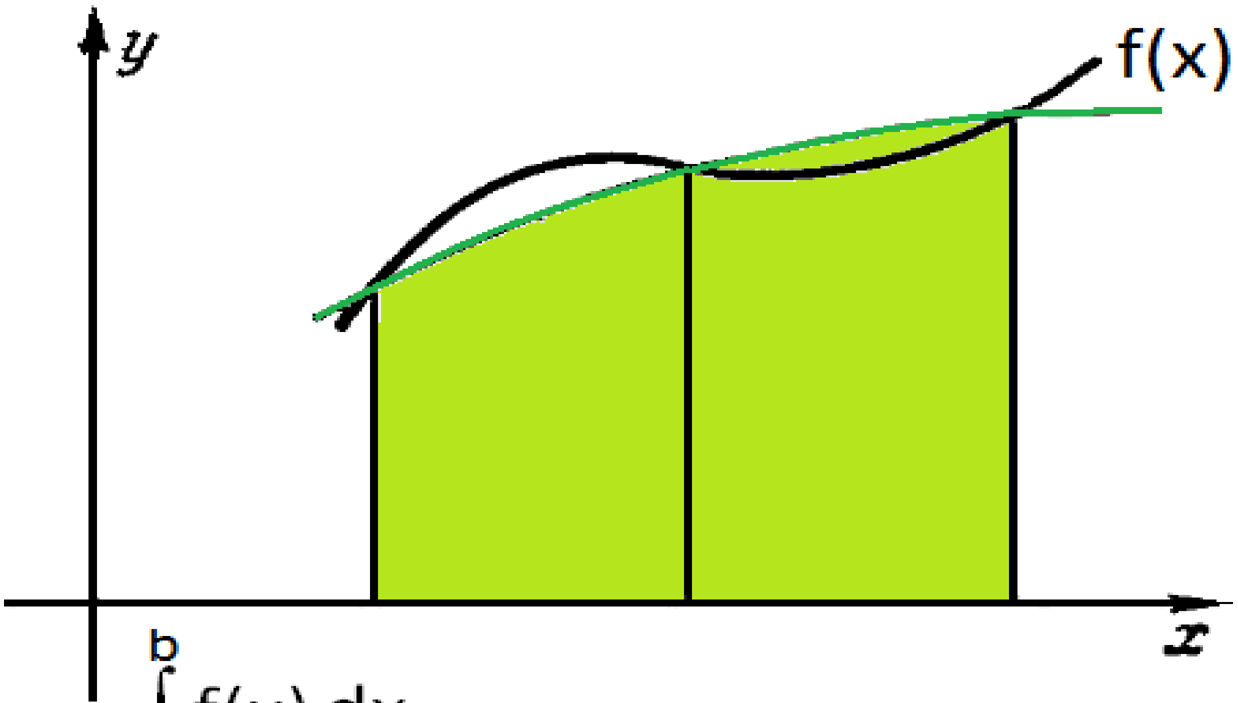
Формула трапеций n=1



$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{\frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)} + R_1(f)$$

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(z)$$ для нек. z из [a,b]

Формула Симпсона n=2



$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{b-a}{6} f(a) + 4\frac{b-a}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b)} + R_2(f)$$

$$R_2(f) = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(z) \text{ для нек. } z \text{ из } [a,b]$$

Задача применения кв.формул
(обобщенные кв.формулы)

Дано	Известно
$[A,B]$	
целое m	
$f(x) \in$ Класс на $[A,B]$	
кв.ф. : f & $[a,b] \longrightarrow F$	

N.B.

Требуется	такое, что
число G	$G = \sum_{i=1}^{m} F_i$
[число R]	$R = \int_A^B f(x)dx - G$

Обобщенная формула трапеций n=1,m=5

$[A,B] \Rightarrow x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$

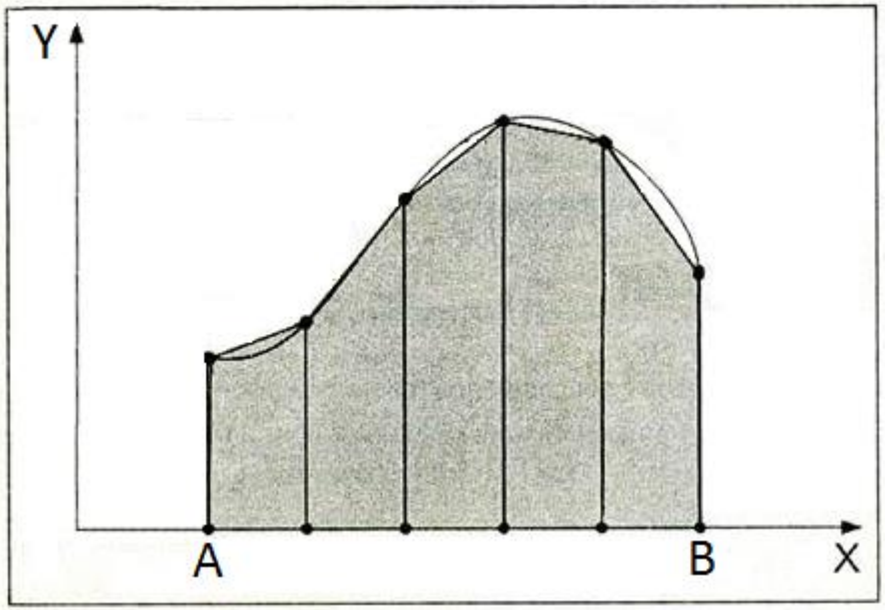
$f \ \& \ [x_0,x_1] \rightarrow F_1$

$f \ \& \ [x_1,x_2] \rightarrow F_2$

$f \ \& \ [x_2,x_3] \rightarrow F_3$

$f \ \& \ [x_3,x_4] \rightarrow F_4$

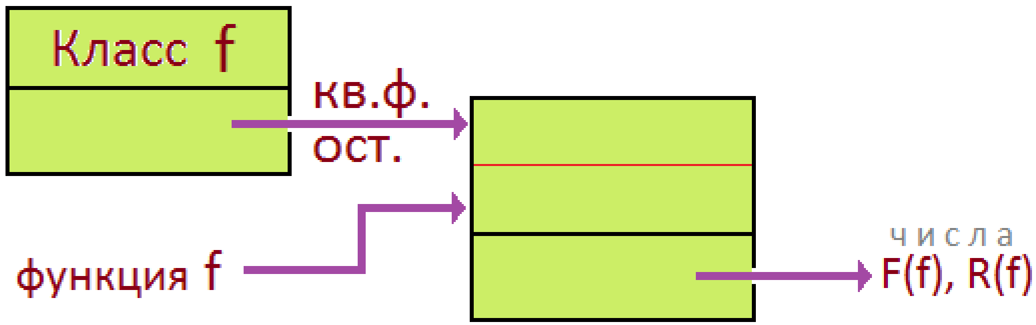
$f \ \& \ [x_4,x_5] \rightarrow F_5$



$$G = (B-A)\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+f(x_5)\right]/m$$

$R = (B-A)*f''(z)/\left[12*m^2\right]$, где $z \in [A,B]$

Использование кв.формул



$$F(f) \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

Дано	
$f(x)$ – функция	$0 < \varepsilon$

Требуется	
F	$\left| F - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$

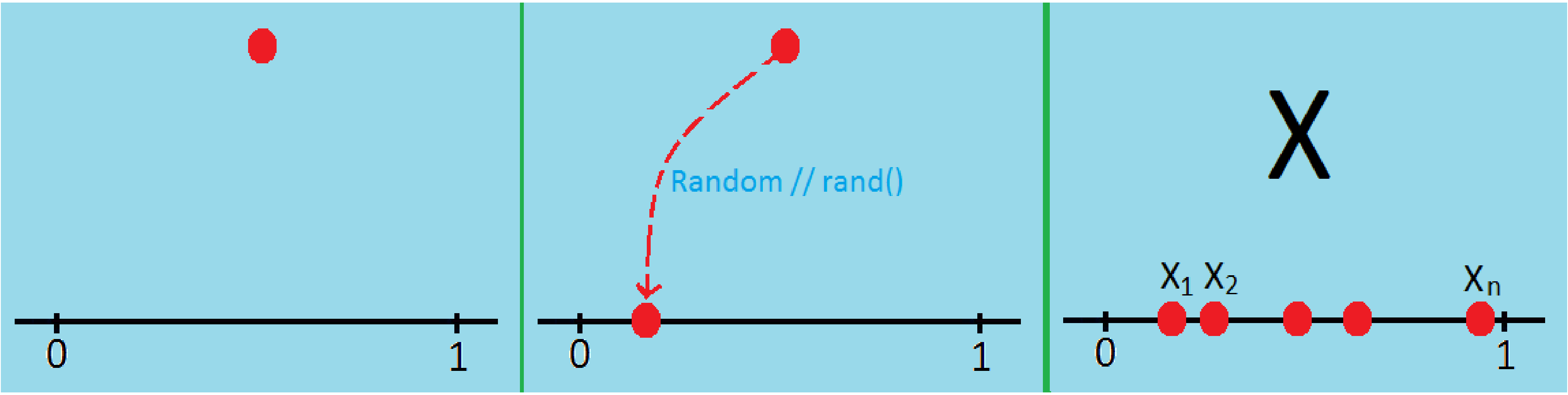
Вероятностная постановка задачи интегрирования

Дано	Известно		
$f(x)$ – функция на $[0,1]$	$0 \le f(x) \le 1$	$0 < \varepsilon$	$0 < p < 1$
числа ε, p	существует $M_f = \int_0^1 f(x)\,dx$		
	существует $D_f = \int_0^1 (f(x) - M_f)^2\,dx$		

Методы Монте-Карло: (а), (б)

Требуется	такое, что
число F	$p <$ вероятность$\left(\boxed{\lvert F - M_f \rvert < \varepsilon}\right)$

[Равномерные] случайные величины



Характеристики с.в.

M(X) – математическое ожидание   точка концентрации

$\rightarrow$ интеграл

D(X) – дисперсия = $M[(X-M(x))^2]$ характеристика разброса

Теорема Чебышева

$$P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - M(X) \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{D(X)}{n\,\varepsilon^2}$$

X -- равномерно распределенная с.в. $M(X) = 0.5$

$f(X)$ -- с.в. $M(f(X)) = \int_0^1 f(x)\,dx$

Метод Монте-Карло. Вариант (а)

1. Оценить D_f $D_f < 1$

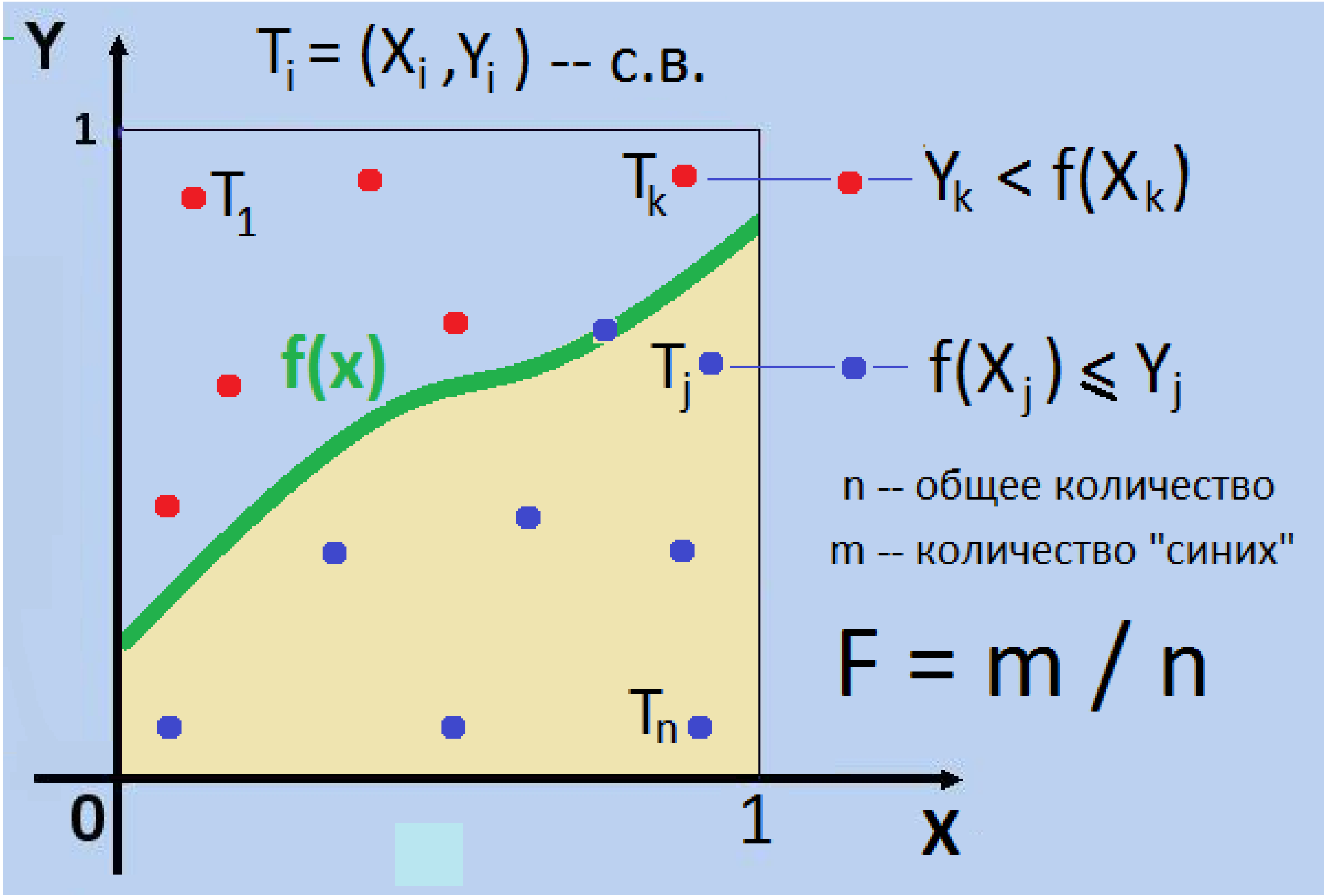
2. Вычислить n из равенства

$$p = 1 - D_f/(n\varepsilon^2) \qquad n = \varepsilon^{-2}(1-p)^{-1}$$

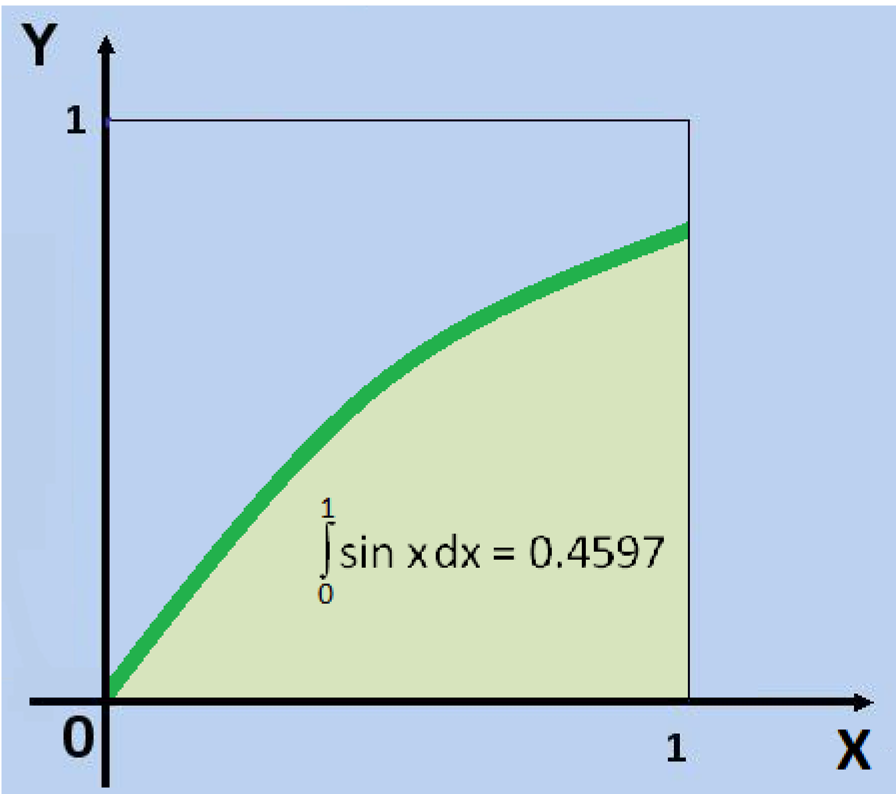
3. Вычислить $F = (\Sigma_{i=1..n} f(X_i)\ )\ /\ n$

$$F = (\Sigma_{i=1..n} f(rand()))/n$$

Метод Монте-Карло. Вариант (б)



Пример интегрирования методом Монте-Карло



(а)

n=100	F=0.4424
n=1000	F=0.4598
n=10000	F=0.4586

(б)

n=100	F=0.4600
n=1000	F=0.4587
n=10000	F=0.4559

• Задача решения системы линейных алгебраических уравнений (обозначения)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$x = A^{-1} f$

$\Uparrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{Ax = f}$

$\Downarrow$

A невырожденные $\det A \neq 0$

симметричные $a_{ij} = a_{ji}$

с диагональным преобладанием

диагональные

трехдиагональные

…

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= f_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= f_n \end{aligned}$$

Постановка задачи решения СЛАУ – 1

Дано		Известно
	целое n	$\det A \neq 0$
	матрица A	
	вектор f	*Необ:* св-ва A

Точные методы

Требуется	такое, что
вектор x	$Ax = f$

Точные методы решения СЛАУ

- Методы Гаусса **$O(n^3)$**
- Методы обращения матриц – 1
- Методы Жордана
- Метод квадратного корня[1)]
- Методы ортогонализации

…

[1)] для симметричных матриц

Постановка задачи решения СЛАУ – 2

Дано	Известно
целое n	$\det A \neq 0$
матрица A	
вектор f	*Необ:* св-ва A
число ε	

Итерационные методы:

x_0 -- начальный; $x_{k+1} = F_k(x_0, \ldots, x_k)$

Требуется	такое, что $x = x_k$
вектор x	$\|x_k - A^{-1} f\| < \varepsilon$

Итерационные методы решения СЛАУ

- Простая итерация
- Метод Ричардсона
- Метод обращения матриц – 2
- Метод Зейделя
- Релаксационный метод
- Метод скорейшего спуска

…

Вычислительные проблемы СЛАУ

Малые возмущения a_{ij} и f_i

м о г у т

значительно влиять на решение СЛАУ.

Пример No. 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,00 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,01 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

N.B.

Пример No. 2

матрица 30 x 30

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & 0 \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 1$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & 0 \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ b & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A' = 1 - b \cdot 2^{29} = 0$$

$$b = 2^{-29} \approx 0.18 \cdot 10^{-8}$$

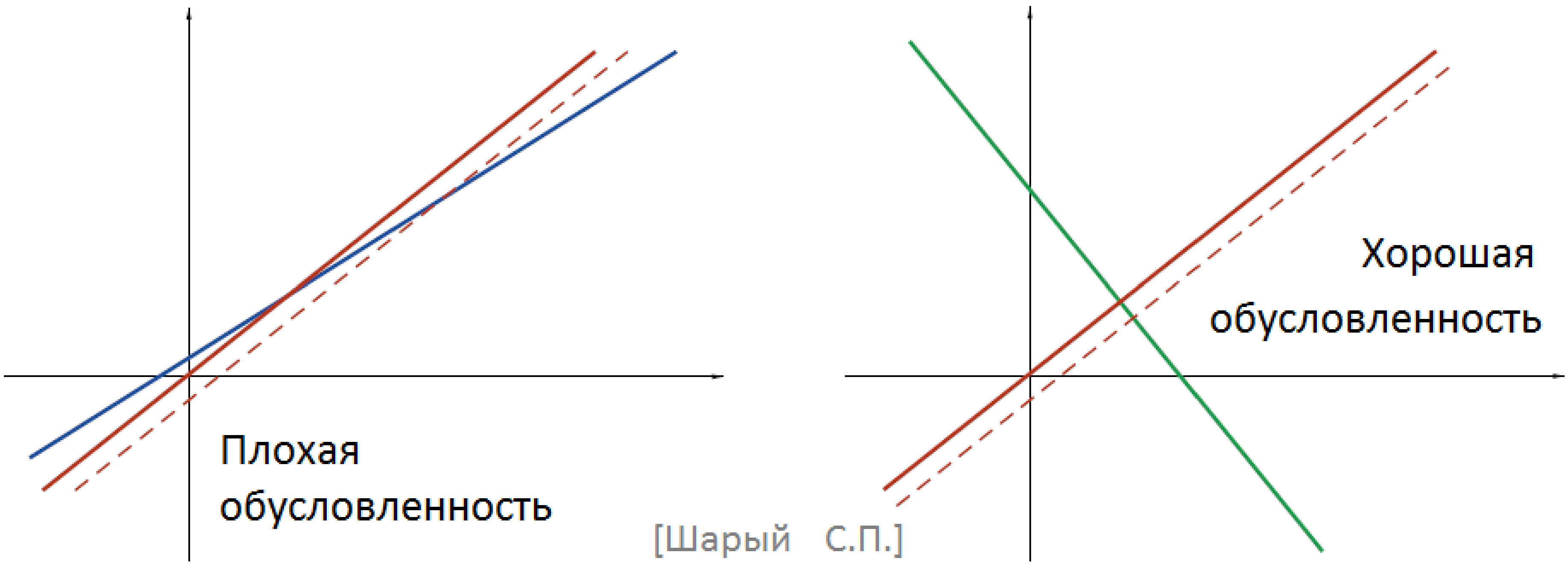
Число обусловленности матрицы

$$M_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

- **$1 \le M_A$**
- Чем больше **M_A** тем больше решение СЛАУ реагирует на возмущения правой части
- Хорошо обусловленная матрица: **$M_A \sim 1$**
- Плохо обусловленная матрица: **$M_A >> 1$**

Если $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}01 \end{bmatrix}$, то $M_A = 200$

Хорошая vs. Плохая обусловленность



[Шарый С.П.]

• Задача вычисления корней

[нелинейных уравнений]

Математика

$f(x)$

$c : f(c) = 0$

$\Rightarrow$ Утверждения

Информатика

$f(x), \varepsilon \;|\; c : f(c) = 0$

$z : |z - c| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Алгоритмы:

биекции | итераций | Ньютона

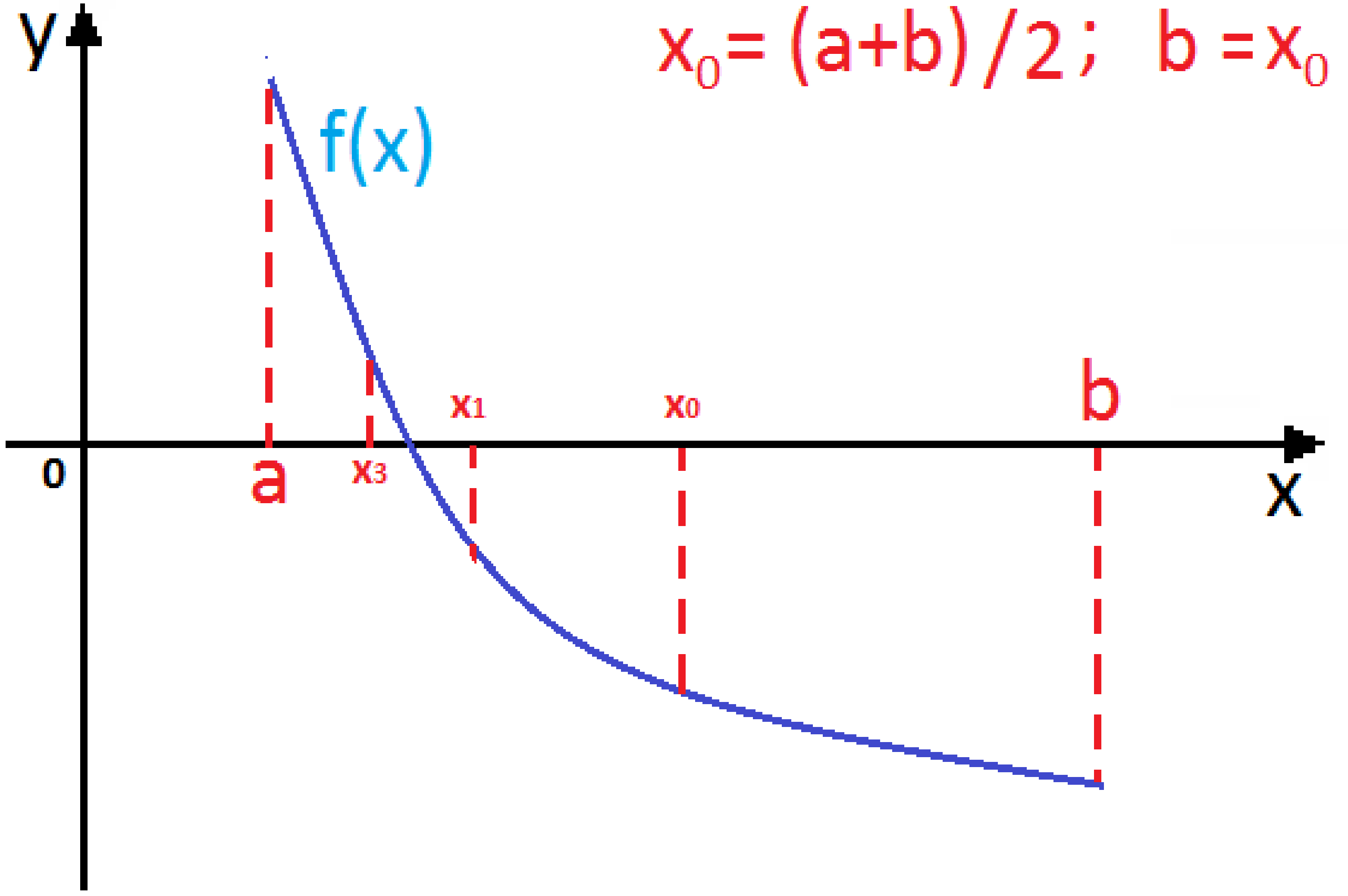
Задача вычисления корня уравнения $f(x)=0$

Дано $[a,b]$	Известно
функция $f(x)$	$f(x) \in C[a,b]$
число ε	$f(a) \cdot f(b) < 0$

Метод биекции / Метод вилки

Требуется	такое, что
число z	$z \in [a,b] : \lvert z - c \rvert < \varepsilon$, где $f(c) = 0$

Метод биекции



Задача вычисления корня уравнения x = f(x)

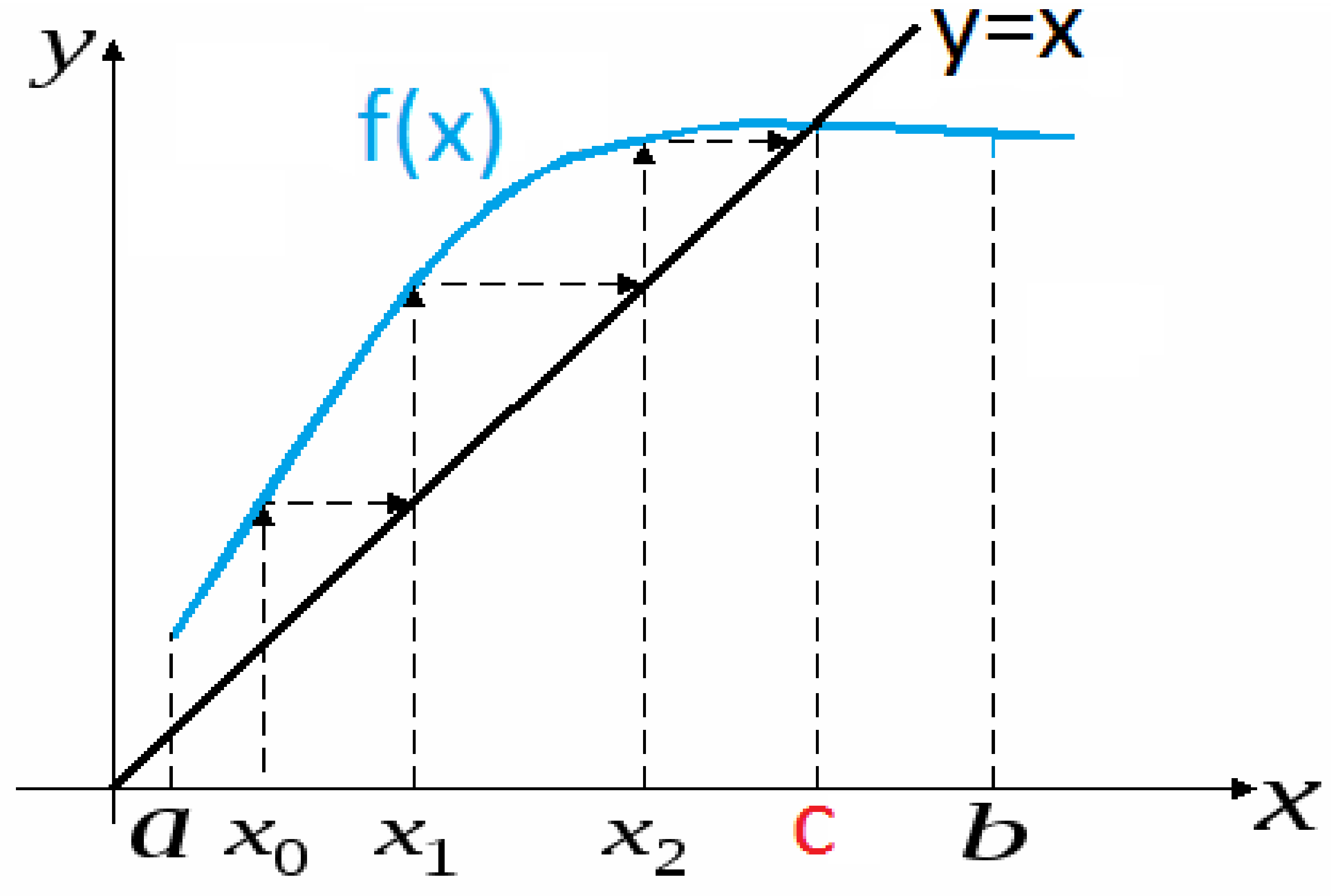
Дано	Известно
$[a,b]$	$\exists c \in [a,b] : c = f(c)$
функция $f(x)$	$\exists L < 1 : \forall u,v \in [a,b]$ $\lvert f(u) - f(v) \rvert < L \lvert u - v \rvert$
число ε	

Метод итераций

Требуется	такое, что
число z	$z \in [a,b] : \lvert z - c \rvert < \varepsilon$

Метод итераций

$X_{i+1} = f(x_i)$



Задача вычисления локализованного корня уравнения f(x) = 0

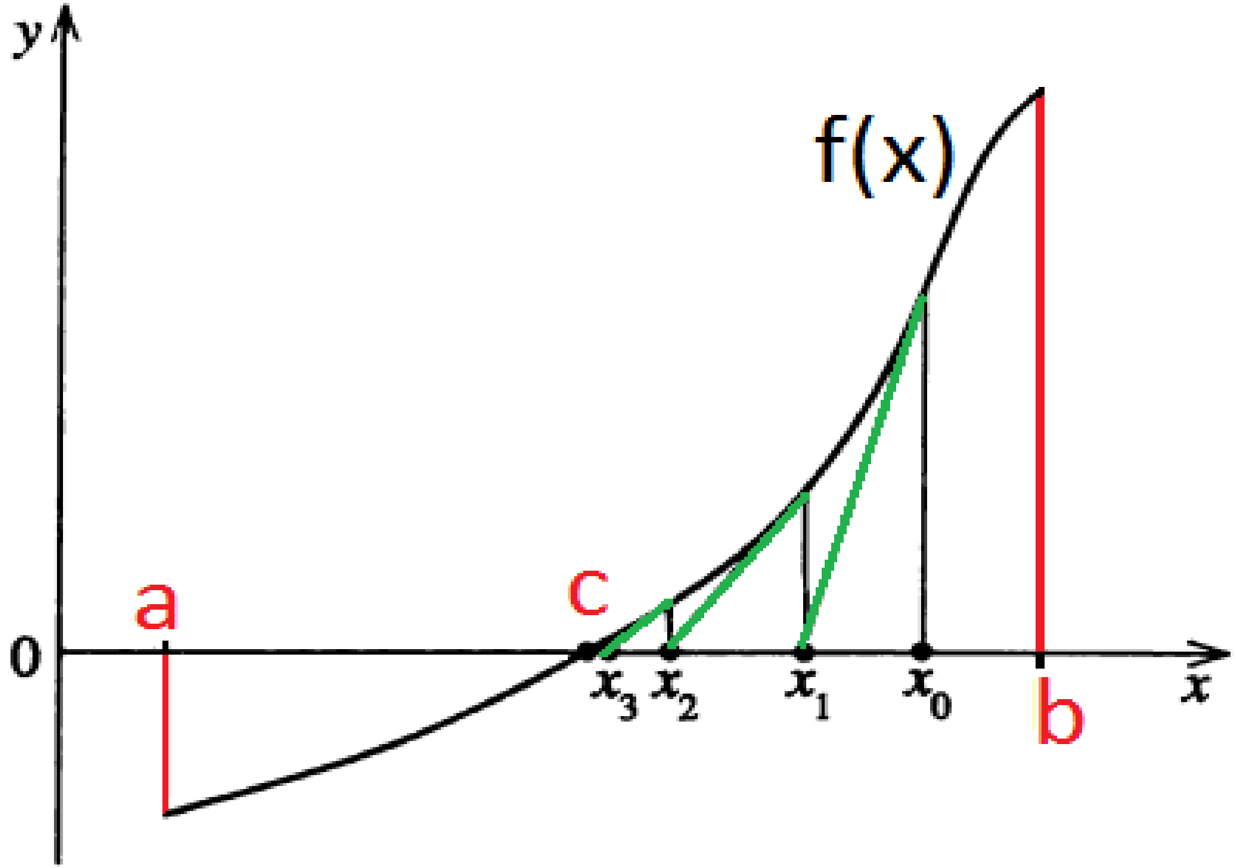
Дано	Известно
$[a,b]$	$\exists c : a < c < b$ & $f(c) = 0$
функция $f(x)$	$f(x) \in C^2[a,b]$
число ε	$\exists\, m, M : \forall x \in [a,b]$ $0 < m \leqslant \lvert f'(x) \rvert$ $\lvert f''(x) \rvert \leqslant M$

Метод касательных / Метод Ньютона

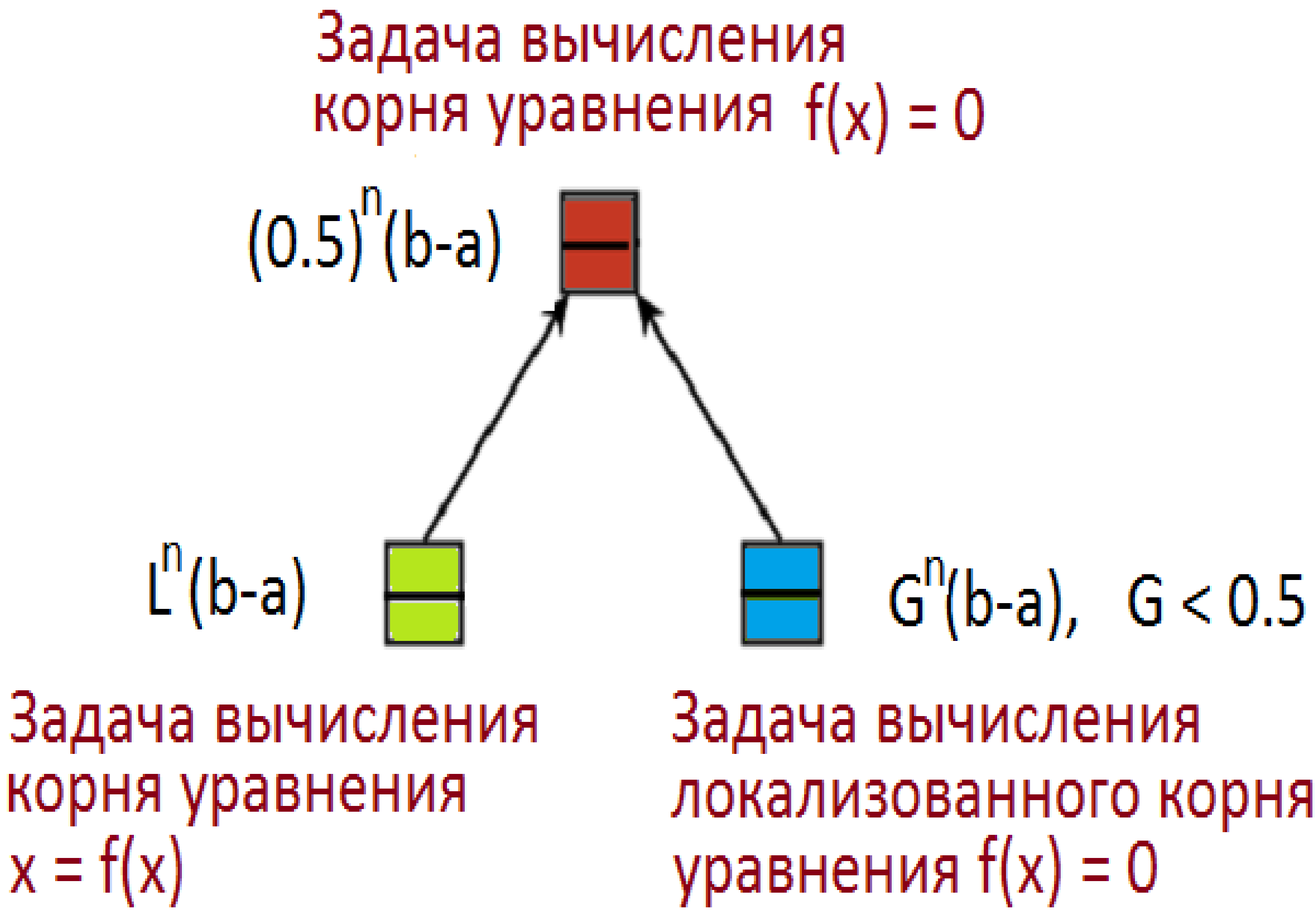
Требуется	такое, что
число z	$z \in [a,b] : \lvert z - c \rvert < \varepsilon$

Метод касательных

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$



Задачи вычисления корней



В о п р о с ы?

soloviev@glossary.ru